復刊

数理論理学

松本和夫 著

共立出版株式会社

序

論理学はいうまでもなく，真な命題から別の真な命題を導く推論法則を一般的に研究する学問であり，数理論理学は数学的な方法を用いて研究される論理学と考えることができる．

数理論理学は数学における証明の構造を的確に表現することができるので，数学の種々の体系の無矛盾証明など数学基礎論の研究に対する強力な手段として重要であり，また一方電子回路の解析や合成さらにオートマトンの研究など工学的な面にも大切な役割を演じており，この意味でも「現代の数学」とよばれるにふさわしい数学の一分科である．

本書は数理論理学の一般的な解説および証明論の紹介を目的としているが，とり扱われる結果は数理論理学の中では最も基本的な部分であり，しかもその大部分はすでに古典に属しているものである．本書の具体的な内容については目次および各章ごとにつけられた概要を参照されたい．

数理論理学の研究を行なう場合，どんな立場でどのような対象を扱っているかを明らかにしておく必要があるので，このことについて一言ふれておこう．

1. 研究対象　　最も普通に考えられるのは古典論理といわれるものである．しかしこれより弱い論理として直観主義論理，最小論理，肯定論理，原始論理などが定義されており，また一方古典論理より強いものとして種々の様相論理がとり扱われる．

2. 研究範囲　　超限的命題（すなわち∀や∃を含む命題）を含むかどうかで，述語論理，命題論理に区別される．このほか数学基礎論の研究には高階述語論理が大切であるが本書では立ちいらない．

3. 研究の立場　　命題や推論の研究に際し，真偽の概念を導入する立場（セマンティックス）と，真偽の概念を用いず，命題や推論の形式的な構造だけに目をつけて研究する立場（シンタックス）とに分かれる．

また後者の場合公理体系のつくり方により，推論をできるだけ少なくする方

法（Hilbert 流）と，逆に公理をできるだけ少なくする方法（Gentzen 流）の二つに大まかに分けておく．この両者の間に中間的な公理系がいろいろと考えられる．

本書での各章のとり扱い方は，上記1～3をいろいろ組み合わせた形になっている．一例をあげれば，1·1 節はセマンティックスの立場で古典論理を命題論理の範囲で扱っていることになり，また3·2節ではシンタックスの立場で直観主義論理を述語論理の範囲で，しかも公理化は Gentzen 流に行なっている，という具合である．

本書では数理論理学の基本的ないろいろの概念についてできるだけ相互の関連を考慮しながら古典的な部分を紹介するつもりであったが，実力不足のため残念ながら当初の計画どおりには筆がはこばなかった．

本書の執筆中，大芝猛氏には原稿を読んでいただき，多くの貴重な助言をうけた．また丸山哲郎，中野良弘両氏にもいろいろ知恵をかしていただいた．また共立出版株式会社の方々，とくに坂野一寿，深瀬英弥両氏には何かとお世話になった．この機会に厚くお礼申し上げたい．

終わりに本講座に執筆の機会を与えられた編集委員の方々および長い間暖かい目で励ましをいただいた多くの恩師，先輩，同僚諸氏に厚くお礼申し上げます．

1969 年 12 月

松　本　和　夫

目　　　次

第1章　命　題　論　理

第2章　述　語　論　理

第3章　直観主義論理

第4章 述語計算 LK

第5章 自然数論

第6章　様　相　論　理

第7章　束論と論理

第1章　命　題　論　理

第1章では命題論理を扱う．命題論理は数理論理学を展開するとき最も基本となる部分である．また命題論理を解説する最も簡明な仕方は，真偽の概念を用いる方法であろう．1·1 節でとり扱っているのは正にこの部分であって，数理論理学に全く不馴れな読者のための入門として書かれたものである．真理表による命題の扱い，tautology の基本的な性質をはじめ，双対の原理や標準形について解説する．1·2 節では同じ対象を公理的な方法を用いて展開する．まずこの方法を一般的に述べた後，Hilbert 流とよばれる方法を用いて命題計算を扱う．この方法では演繹定理が大切であり，これを用いて基本的な推論を導くことができる．1·1 節の方法（モデル理論）と 1·2 節の方法（証明理論）の間の関係を示す完全性定理を述べ，また公理系の無矛盾性，独立性など数理論理学の基本的な概念について解説する．第1章だけで独立した数理論理学入門と考えることができる．

1·1　命　題　論　理

A．真　理　表

a．論理式　　数理論理学において最も基本的な概念の一つは命題である．**命題**（proposition）とはあることがらを述べたものであるが，第1章で扱うのは，それが真であるか偽であるかどちらか一方に定まっているものに限ることとする．「7は素数である」は真な命題であり，「$2<1$」は偽な命題である．また「$a+1<2$」は a に実数を代入しない限り真偽は定まらないから，ここでいう命題ではない．**命題論理**（propositional logic）は各命題の真偽の値にだけ目をつけて，それらの間の関係をしらべることを目的とする．そのために命題の論理的構造を形式的に表わした論理式の集合を考える．まず命題一般を形式的に $A, B, C, \cdots, A_1, A_2, \cdots$ などの記号で表わす．

このような記号を**命題変数**（proposition variable）という．また常に真の値をとるような命題を形式的に記号Yで表わし，また常に偽の値をとるような命題を一般に記号で⅄と表わし，Yおよび⅄を**命題定数**（proposition constant）という．真，偽を表わすのに簡単に1および0で表わすことにすれば，命題変

数Aは1かまたは0の値をとる変数，$\curlyvee$は常に値1をとる定数，$\curlywedge$は常に値0をとる定数であるといえる．

次に「AかつB」，「AまたはB」，「Aでない」，「AならばB」という内容を表わす新しい表現をつくるため，記号 $\wedge, \vee, \neg, \supset$ を用いて，それぞれ $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$, $A \supset B$ と表わすことにする．

一般に，命題変数および命題定数に，記号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$ を用いてつくられたものを**論理式** (formula) という．論理式を表わすには $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots$ などを用いる．論理式は正確には次のように定義する．

定義 1

1. 命題定数 $\curlyvee, \curlywedge$ は論理式である．
2. 命題変数 $A, B, \cdots$は論理式である．
3. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が任意の論理式ならば，$(\mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{B}), (\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B}), \neg(\mathfrak{A}), (\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{B})$ は論理式である．
4. 以上 1～3 で論理式とわかったものだけが論理式である．

注　定義1ではまず最も簡単な論理式を 1，2 で定義し，次にこれらから新しい論理式をつくり出す規則を3で与えるという形をとっている．このような定義を**帰納的な定義** (inductive definition) という．

注　命題変数として $A_1, A_2, \cdots$などを用いることもある．

b．真理表　論理式はそれに含まれる命題変数 $A, B, \cdots$が1や0の値をそれぞれ独立にとるとき，1か0の値をとるようにきめられる．

1. **論理積** (logical product, conjunction, $\wedge$)　$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がともに真の値をとるときに限り，$(\mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{B})$ は真の値をとると定義する．したがって，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ のうち少なくも一方が偽のときは，$(\mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{B})$ は偽である．これを右のような表で表わし，$(\mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{B})$ の**真理表** (truth table) という．

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. **論理和** (logical sum, disjunction, $\vee$)　$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がともに偽の値をとるときに限り，$(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ は偽の値をとると定義する．したがって，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ のうち少なくも一方が真のときは，$(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ は真である．$(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ の真理表は右のようになる．

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3.　**否定**（negation, $\neg$）　$\mathfrak{A}$ が真の値をとるときに限り，$\neg(\mathfrak{A})$ は偽の値をとると定義する．したがって，$\mathfrak{A}$ が偽のとき $\neg(\mathfrak{A})$ は真となる．$\neg(\mathfrak{A})$ の真理表は右のようになる．

$\mathfrak{A}$	$\neg\mathfrak{A}$
0	1
1	0

4.　**含意**（implication, $\supset$）　$\mathfrak{A}$ が真の値をとり，$\mathfrak{B}$ が偽の値をとるときに限り $(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ は偽の値をとると定義する．したがって，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ のほかの真，偽の値のとり方に対しては，$(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ は真である．$(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ の真理表は右のようになる．

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注　$(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ は，$\mathfrak{A}$ を仮定して $\mathfrak{B}$ が導かれるという内容を形式化したものであるから，少なくとも真な論理式 $\mathfrak{A}$ から，偽な論理式 $\mathfrak{B}$ が導かれることは禁じられねばならない．また「すべての a, b, c について $a=b$ ならば $ac=bc$ が成り立つ」というよく知られた推論は，ここに与えた $(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ の真理表のきめ方の妥当であることを示している．

記号 $\wedge, \vee, \neg, \supset$ を**論理記号**（logical symbol）という．

論理式の定義にしたがって論理式$\mathfrak{A}$を構成してゆくとき，途中に現われる論理式を（$\mathfrak{A}$ 自身も含めて）$\mathfrak{A}$ の**部分論理式**（subformula）という．また$\mathfrak{A}$を構成して行くとき，最後に導入された論理記号を，$\mathfrak{A}$ の**一番外側の記号**（outermost symbol）という．

なお，以上の論理記号のほか $((\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B}))\wedge((\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}))$ の略記号として**同値**（equivalence, $\equiv$）を用いることがある．$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がともに真の値をとるか，またはともに偽の値をとるときに限り真の値をとる．$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ の真理表は右のようになる．

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\equiv$が**同値関係**（equivalence relation）

$$\begin{cases} \mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A} & \text{反射法則 (reflexive law)} \\ \mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B} \text{ ならば } \mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A} & \text{対称法則 (symmetric law)} \\ \mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B} \text{ かつ } \mathfrak{B}\equiv\mathfrak{C} \text{ ならば } \mathfrak{A}\equiv\mathfrak{C} & \text{推移法則 (transitive law)} \end{cases}$$

をみたすことは明らかであろう．

注　論理式の定義にしたがえば，論理記号が導入されるごとに（　）がつけられるが，今後まぎらわしくないときは代数の演算記号のときのように省略する．結合の強さは$\neg$

が最も強く，$\wedge$と$\vee$がつづき，$\supset$，$\equiv$の順に弱くなる．

論理式の例

$((A\vee\neg B)\wedge C)\supset D$ 定義どおり（ ）を省略しないで書けば $(((A)\vee(\neg(B)))\wedge(C))\supset(D)$ となる．部分論理式は $A, B, \neg B, A\vee\neg B, C, (A\vee\neg B)\wedge C, D, ((A\vee\neg B)\wedge C)\supset D$ であり，一番外側の記号は$\supset$である．

真理表を用いて，論理式 $\neg A\vee\neg B\equiv\neg(A\wedge B)$ の真理値を求めよう．

この論理式に含まれる命題変数 A, B を左列に，論理式の対応する値を右列に記入すれば，次のような真理表がえられ，最も右の列に求める論理式の真理値がえられる．

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\vee\neg B$	$A\wedge B$	$\neg(A\wedge B)$	$\neg A\vee\neg B\equiv\neg(A\wedge B)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1

B. トートロジー

a. トートロジー　$\neg A\vee\neg B\equiv\neg(A\wedge B)$ の真理表では，A，B のあらゆる 0, 1 の与え方に対して常に 1 の値をとった．このような論理式をトートロジーというが，ここではトートロジーの性質などをしらべよう．

定義 2　論理式$\mathfrak{A}$に含まれる命題変数にそれぞれ独立に真偽値 0 または 1 を与える与え方の一つを$\mathfrak{A}$の**付値**（valuation）という．$\mathfrak{A}$のすべての付値に対して$\mathfrak{A}$が常に値 1 をとるとき，$\mathfrak{A}$を**トートロジー**（tautology）という．また$\mathfrak{A}$は**恒真**（valid）であるともいい，$\models\mathfrak{A}$ で表わす．

$\mathfrak{A}$が n 個の命題変数を含むとき，$\mathfrak{A}$の付値は 2^n とおりある．与えられた論理式がトートロジーであるかどうかは有限とおりのあらゆる付値に対し，論理式が 1 の値をとるかどうかをしらべればよいから，有限回の操作で決定することができる．

真理表を用いれば次の各論理式 (1.1)～(1.18) はトートロジーであることを確かめることができる．

$$A\wedge A\equiv A \qquad\qquad A\vee A\equiv A \tag{1.1}$$

$$A\wedge B\equiv B\wedge A \qquad A\vee B\equiv B\vee A \tag{1.2}$$

$$(A\wedge B)\vee A\equiv A \qquad (A\vee B)\wedge A\equiv A \tag{1.3}$$

$$(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C) \qquad (A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C) \tag{1.4}$$

$$(A\wedge B)\vee C\equiv(A\vee C)\wedge(B\vee C) \qquad (A\vee B)\wedge C\equiv(A\wedge C)\vee(B\wedge C) \tag{1.5}$$

$$\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B \qquad \neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B \tag{1.6}$$

$$A\vee\neg A\equiv\curlyvee \qquad A\wedge\neg A\equiv\curlywedge \tag{1.7}$$

$$\neg\neg A\equiv A \tag{1.8}$$

(1.1) を**ベキ等法則** (idempotent law), (1.2) を**交換法則** (commutative law), (1.3) を**吸収法則** (absorptive law), (1.4) を **結合法則** (associative law), (1.5) を**分配法則** (distributive law), (1.6) を**ド・モルガンの法則** (de Morgan's law), (1.7) の第一のものを**排中律** (law of the excluded middle; tertium non datur), 第二のものを**矛盾律** (law of contradiction), (1.8) を**二重否定の法則** (law of double negation) という.

命題定数$\curlyvee$, $\curlywedge$ を含むトートロジーのおもなものをあげよう.

$$\neg\curlyvee\equiv\curlywedge \qquad \neg\curlywedge\equiv\curlyvee \tag{1.9}$$

$$\curlyvee\vee A\equiv\curlyvee \qquad \curlywedge\wedge A\equiv\curlywedge \tag{1.10}$$

$$\curlyvee\wedge A\equiv A \qquad \curlywedge\vee A\equiv A \tag{1.11}$$

$$\curlyvee\supset A\equiv A \qquad \curlywedge\supset A\equiv\curlyvee \tag{1.12}$$

$$(A\equiv\curlyvee)\equiv A \qquad (A\equiv\curlywedge)\equiv\neg A \tag{1.13}$$

注　これらのトートロジーについては，すべてまえに$\models$をつけなければいけないけれども省略してある．また以下では $\models\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, $\models\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{C}$, …と書くところを簡単に $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{C}$ …などと省略してある．

論理記号の間の関係を示すトートロジーとしては，次のものが大切である．

$$A\supset B\equiv\neg A\vee B \tag{1.14}$$

$$(A\equiv B)\equiv(A\supset B)\wedge(B\supset A) \tag{1.15}$$

(1.8) と (1.6) および，$\equiv$が同値関係をみたすことを用いると

$$A\vee B\equiv\neg(\neg A\wedge\neg B) \tag{1.16}$$

また (1.14) と (1.16) から

$$A\supset B\equiv\neg A\vee B\equiv\neg(\neg\neg A\wedge\neg B)\equiv\neg(A\wedge\neg B) \tag{1.17}$$

(1.15) と (1.17) から

$$(A\equiv B)\equiv\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(B\wedge\neg A) \tag{1.18}$$

がえられる.

すなわち論理記号$\vee, \wedge, \neg, \supset, \equiv$のうち，$\vee, \supset, \equiv$は$\wedge$と$\neg$だけで表わすことができる．したがって始めから$\wedge, \neg$の真理表だけを与え，$\vee, \supset, \equiv$はそれぞれ (1.16)，(1.17)，(1.18) を用いて定義することもできる．同じようにして，$\vee$と$\neg$あるいは$\supset$と$\neg$で他の論理記号を定義することも可能である.

いかなる付値に対しても常に値0をとるような論理式を**矛盾** (contradiction) という．$A \wedge \neg A$, $\neg(A \supset A)$ などは矛盾の論理式である.

以後記法を簡単にするため $\Rightarrow$ と $\Longleftrightarrow$ を次のようにつかう．* $\Rightarrow$ ** は「* が成り立てば ** も成り立つ」を表わし，$\Leftarrow$ についても同様に考える．* $\Longleftrightarrow$ **は「*が成り立つとき，かつそのときに限り**が成り立つ」を表わすものとする．この記号をつかえば，次の関係が成り立つことは明らかであろう.

論理式$\mathfrak{A}$がトートロジー $\Longleftrightarrow$ $\neg\mathfrak{A}$ が矛盾

b．トートロジーの基本性質

定理 1 $\models \mathfrak{A}$ かつ $\models \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \Rightarrow \models \mathfrak{B}$

証明 $\mathfrak{B}$ がトートロジーでないと仮定する．$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ の命題変数はすべて $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ に含まれているから，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の付値は $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ のすべての付値を含んでいる．さて仮定より $\mathfrak{B}$ の付値の中に $\mathfrak{B}$ の値を0にするものが存在するが，この付値に対しては $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ は仮定より値1をとり，$\mathfrak{B}$ は値0をとることとなり，$\supset$の真理表のきめ方と矛盾する. *qed*

定理 2 論理式$\mathfrak{A}$の命題変数を $A_1, \cdots, A_n$ とし，$A_1, \cdots, A_n$ に論理式 $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_n$ をそれぞれ代入してできる論理式を$\mathfrak{B}$とすれば

$$\models \mathfrak{A} \Rightarrow \models \mathfrak{B}$$

証明 $\mathfrak{A}$ は各 A_i のどんな値（0か1）に対しても値1をとる．A_i に $\mathfrak{C}_i$ を代入したとき，$\mathfrak{C}_i$ はまた0か1の値しかとらないから，$\mathfrak{B}$ も常に値1をとる. *qed*

定理 3 論理式$\mathfrak{B}$が論理式$\mathfrak{A}$の部分論理式として含まれているとし，論理式$\mathfrak{D}$を$\mathfrak{B}$に代入したときできる論理式を$\mathfrak{C}$とするならば

$$\models (\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D}) \supset (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}) \quad \text{したがって，} \models \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D} \Rightarrow \models \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}$$

証明 $(\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D}) \supset (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C})$ の任意の付値を考える．$\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{D}$ が異なる値をとれば $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D}$ は値0をとるから，$(\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{D}) \supset (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C})$ は値1をとる．また$\mathfrak{B}$と$\mathfrak{D}$が

同じ値をとれば，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{C}$ は同じ値をとるから，$(\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{D})\supset(\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{C})$ は値 1 をとる．付値は任意であったから，すべての付値に対し $(\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{D})\supset(\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{C})$ は値 1 をとる．後半は定理 1 より明らかである． *qed*∎

注　定理 1 は modus ponens とよばれる推論規則 [1.2 節A項参照] を表わし，定理 2 は代入の規則，定理 3 は置換の規則を表わしている．

C．双対の原理

この項では論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ には $\wedge$, $\vee$, $\neg$ 以外の論理記号は含まれていないと仮定する．また $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ に $\curlyvee$ または $\curlywedge$ が含まれているときはそれぞれ $A\vee\neg A$, $A\wedge\neg A$ でおきかえておくものとする [1.1 節 B 項の (1.7) および定理 3 参照].

論理式 $\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号 $\wedge$, $\vee$ をそれぞれ $\vee$, $\wedge$ でおきかえたものを $\mathfrak{A}$ に**双対** (dual) な論理式といい $\mathfrak{A}^*$ で表わす．明らかに $\mathfrak{A}^*$ の双対は $\mathfrak{A}$ であるから $\models\mathfrak{A}^{**}\equiv\mathfrak{A}$

定理 4　論理式 $\mathfrak{A}$ が $A_1, \cdots, A_n$ 以外には命題変数を含んでいないとき，$\mathfrak{A}(A_1, \cdots, A_n)$ とかくことにすれば

$$\models\neg\mathfrak{A}(A_1, \cdots, A_n)\equiv\mathfrak{A}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$$

証明　$\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号の個数 k についての帰納法による．$k=0$ のとき，$\mathfrak{A}$ が命題変数 A であれば両辺とも $\neg A$ となって成り立つ．$k>0$ のとき，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$ のとき

左辺 $\equiv\neg(\mathfrak{B}(A_1, \cdots, A_n)\wedge\mathfrak{C}(A_1, \cdots, A_n))$

$\equiv\neg\mathfrak{B}(A_1, \cdots, A_n)\vee\neg\mathfrak{C}(A_1, \cdots, A_n)$　[ド・モルガンの法則]

$\equiv\mathfrak{B}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)\vee\mathfrak{C}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$　[帰納法の仮定]

$\equiv\mathfrak{A}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$　[双対の定義]

$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ のときも同様

$\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$ のとき

左辺 $\equiv\neg\neg\mathfrak{B}(A_1, \cdots, A_n)$

$\equiv\mathfrak{B}(A_1, \cdots, A_n)$

$\equiv\neg\mathfrak{B}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)\equiv\mathfrak{A}^*(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$ *qed*∎

したがって，いくつかの命題変数およびそれぞれの否定から $\wedge$ と $\vee$ をほどこしてつくられた論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号 $\wedge$ と $\vee$ を入れかえ，ま

た命題変数をすべてその否定でおきかえれば$\mathfrak{A}$の否定$\neg\mathfrak{A}$と同値な論理式がえられる．定理4で $n=2$ の場合 $\mathfrak{A}(A_1, A_2)$ が $A_1 \wedge A_2$ および $A_1 \vee A_2$ のときが，ド・モルガンの法則である．

注 $\wedge$, $\vee$, $\neg$ の真理表で，0，1 を入れかえると同時に，$\wedge$, $\vee$ も入れかえれば$\wedge$の真理表と$\vee$の真理表がちょうど入れかわり，$\neg$の真理表は変わらないことを用いて定理4を導くこともできる．

定理 5 論理式$\mathfrak{A}$に対し，次のことが成り立つ．

1) $\models\mathfrak{A} \Rightarrow \models\neg\mathfrak{A}^*$

2) $\models\neg\mathfrak{A} \Rightarrow \models\mathfrak{A}^*$

証明 1) $\mathfrak{A}^*$の双対は$\mathfrak{A}$であるから，定理4より

$$\models\neg\mathfrak{A}^*(A_1, \cdots, A_n) \equiv \mathfrak{A}(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$$

仮定から$\models\mathfrak{A}$ だから $\mathfrak{A}(A_1, \cdots, A_n)$ はトートロジーすなわち $A_1, \cdots, A_n$ のどんな 0, 1 の値に対しても$\mathfrak{A}$は値1をとるから，$\mathfrak{A}(\neg A_1, \cdots, \neg A_n)$ もトートロジーである．したがって $\neg\mathfrak{A}^*(A_1, \cdots, A_n)$ もトートロジーである．

2) $\neg\mathfrak{A}$ の双対は $\neg\mathfrak{A}^*$ である $\therefore \models\neg\mathfrak{A}$ ならば，1) より $\models\neg\neg\mathfrak{A}^*$．したがって $\models\mathfrak{A}^*$ *qed*

定理 6 論理式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ に対し

$$\models\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B} \Rightarrow \models\mathfrak{B}^*\supset\mathfrak{A}^*$$

証明 $\models\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ であるから $\models\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ である．$\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ の双対は $\neg\mathfrak{A}^*\wedge\mathfrak{B}^*$ であるから，定理5の 1) より $\models\neg(\neg\mathfrak{A}^*\wedge\mathfrak{B}^*)$．したがって $\models\mathfrak{A}^*\vee\neg\mathfrak{B}^*$．すなわち $\models\mathfrak{B}^*\supset\mathfrak{A}^*$ が成り立つ． *qed*

定理 7 論理式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ に対し

$$\models\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B} \Rightarrow \models\mathfrak{A}^*\equiv\mathfrak{B}^*$$

証明は定理6と$\equiv$の定義から明らかである．

$\mathfrak{B}^*\supset\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*\equiv\mathfrak{B}^*$ をそれぞれ $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ の**双対**という．定理5～7の$\Rightarrow$は$\Longleftrightarrow$でおきかえても成り立つことは明らかである．通常これらの定理を**双対の原理** (duality principle) という．1.1 節B項においてトートロジーとして述べたもの，たとえば (1.1)～(1.7) について，左側にあげたものと，右側にあげたものは定理7の意味で双対である．したがってたとえば左側の論理式が恒真であることを確かめれば，双対の原理により右側の論理式が恒真であ

ることは確かめる必要がない．このようにいま研究の対象としている論理に関する定理（論理の中での定理ではなく）を**超定理**（metatheorem）という．

D. 標 準 形

a. 真理関数　論理式$\mathfrak{A}$が，たとえば $(A\wedge\neg B)\supset C$ であるとしよう．命題変数 A, B, C が 0 か 1 の値をとるとき，すなわち各付値（この場合 2^3 とおりの）に対して $\mathfrak{A}$ は 1 か 0 の値をとる．したがって$\mathfrak{A}$はその表わしている形式を考えなければ，A, B, C を変数とする一つの関数を定める．しかもこの関数は変数のとる値も，関数のとる値も集合 $\{0, 1\}$ の元である．

これを $F(A, B, C)$ で表わす．

論理式$\mathfrak{A}$の真理表を途中計算を略してかけば右のようになるが，$F(A, B, C)$ はこの表で完全に定義されたことになる．$F(A, B, C)$ を 3 変数の**真理関数**（truth-value function）という．次に論理式$\mathfrak{B}$が $\neg A\vee B\vee C$ であるとしよう．明らかに$\mathfrak{A}$と$\mathfrak{B}$は同値であるが，論理式$\mathfrak{B}$もまた一つの真理関数を定める．しかも$\mathfrak{B}$の真理表をつくれば右図と同一のものとなることは≡の定義より明らかである．したがって，同値な論理式は同一の真理関数を定めることがわかる．

A	B	C	$(A\wedge\neg B)\supset C$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

一般に n 個の変数 $A_1, \cdots, A_n$ の関数で，変数の値および関数値が $\{0, 1\}$ の元であるとき，これを $F(A_1, \cdots, A_n)$ と表わし，**n 変数の真理関数**という．$A_1, \cdots, A_n$ がそれぞれ 0 か 1 の値をとるとき，2^n とおりの $A_1, \cdots, A_n$ の順列がえられるが，それに応じ関数値が 0 をとるか 1 をとるかの 2 とおり考えられるから，n 変数の真理関数は 2^{2^n} とおりあることがわかる．たとえば 1 変数の真理関数 $F(A)$ では次の $2^{2^1}=4$ とおりがえられる．

A	0	1	
	0	0	人
	0	1	A
$F(A)$	1	0	$\neg A$
	1	1	Y

第 3 行目では A が値 0 をとるとき $F(A)=1$
A が値 1 をとるとき $F(A)=0$
したがって $F(A)$ は $\neg A$ と同値な論理式であることを表わしている．

b．標準形　　n 個の命題変数を含む論理式には n 変数の真理関数が対応し同値な論理式には同一の真理関数が対応することは上で述べたが，逆に真理関数が与えられたとき，これに対応する論理式は必ず存在することが示される．

定理 8　任意の真理関数に対し，論理記号として $\wedge, \vee, \neg$ しか含まないような論理式を対応させることができる．

証明　与えられた真理関数を $F(A_1, \cdots, A_n)$ とすれば，n 個の変数 $A_1, \cdots, A_n$ をもつ真理表が与えられたと仮定してよい．この真理表は 2^n 個の行からなっており，各行は変数 $A_1, \cdots, A_n$ の一つの付値を表わしている．

真理表の第 i 行 $(1 \leqq i \leqq 2^n)$ に対して $U_1^i \wedge U_2^i \wedge \cdots \wedge U_n^i$ を $\mathfrak{C}_i$ とする．ただし真理表の第 i 行で A_j が 1 のとき U_j^i は A_j をとり，同じ行で A_j が 0 のとき U_j^i は $\neg A_j$ をとるものとする．

真理表で F の値が 1 をとるような行（第 i 行）に対して，$\mathfrak{C}_i$ をつくり，これらすべての論理和を $\mathfrak{D}$ とする（F の値が 1 であるような行がなければ，F は常に値 0 をとるが，このときは $\mathfrak{D}$ を $A_1 \wedge \neg A_1$ とおく）．$\mathfrak{C}_i$ を $\mathfrak{D}$ の**基本積**という．このとき，論理式 $\mathfrak{D}$ に対応する真理関数が $F(A_1, \cdots, A_n)$ になることを示す．すなわち始めに与えられた（と仮定した）真理表の一つの付値（ある行）に対し，F の値が 1（または 0）をとることと，この真理表をもとにして上の方法で構成した論理式 $\mathfrak{D}$ が，この同じ付値に対し値 1（または 0）をとることが同値になることを示せばよい．

$\mathfrak{D}$ の命題変数 $A_1, \cdots, A_n$ に 0 か 1 かを与える一つの付値が与えられたとし，これが与えられた真理表の第 k 行目に対応しているとする．この付値に対し定義より $\mathfrak{C}_k$ は値 1 をとり，これ以外の $\mathfrak{C}_i (i \neq k)$ は値 0 をとる．したがって第 k 行目で F が値 1 をとれば，$\mathfrak{C}_k$ は $\mathfrak{D}$ の基本積であるから，$\mathfrak{D}$ はこの付値で値 1 をとる．またこの付値で F が値 0 をとるとき，（F の値が常に 0 のときは明らかであるから，そうでないとすれば）$\mathfrak{C}_k$ は $\mathfrak{D}$ の基本積でない．ゆえに $\mathfrak{D}$ のすべての基本積はこの付値に対し値 0 をとり，$\mathfrak{D}$ は値 0 をとる．　　qed

注　定理 8 の証明で述べた方法によれば，任意の真理関数に対し，これに対応する論理式は項の順序を無視すれば一意にきまる．

例　次頁の表で定義される真理関数 $F(A_1, A_2)$ を表現する論理式を求めよう．定義より $\mathfrak{C}_1 : \neg A_1 \wedge \neg A_2$，$\mathfrak{C}_2 : \neg A_1 \wedge A_2$，$\mathfrak{C}_3 : A_1 \wedge \neg A_2$，$\mathfrak{C}_4 : A_1 \wedge A_2$

であり，Fの値が1をとるのは第1，2，3行であるから，$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ の論理和をつくり，$\mathfrak{D}$は
$(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ となる．

A_1	A_2	$F(A_1, A_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

以上をまとめると，次のことが成り立つ．

n個の命題変数をもつ任意の（矛盾ではない）論理式$\mathfrak{A}$に対し，論理記号として$\wedge, \vee, \neg$ だけをもつ論理式$\mathfrak{D}$が対応し，定理8で述べたつくり方を定めれば，項の順序を無視して一意にきまる．$\mathfrak{D}$は$\mathfrak{A}$の命題変数 A_i またはその否定 $\neg A_i (i=1, \cdots, n)$ の n 個の論理積 $\mathfrak{C}_i$ を有限個（$\leqq 2^n$）論理和で結合した論理式として表わされ，$\models \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$ が成り立つ．

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$ の $\vee$-**標準形**（**和標準形**）(principal disjunctive normal form) という．

$\vee$-標準形で表わされた論理式は，一般的にはこれと同値でより簡単な形の論理式に変形できる．たとえば上述の例でえられた$\mathfrak{D}$は

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$$
$$\equiv \{(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2)\} \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \quad [\text{結合律}]$$
$$\equiv \{\neg A_1 \wedge (\neg A_2 \vee A_2)\} \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \quad [\text{分配律}]$$
$$\equiv \{\neg A_1 \wedge \Upsilon\} \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \quad [\text{排中律}]$$
$$\equiv \neg A_1 \vee (A_1 \wedge \neg A_2) \quad [A \wedge \Upsilon \equiv A]$$
$$\equiv (\neg A_1 \vee A_1) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2) \quad [\text{分配律}]$$
$$\equiv \Upsilon \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2) \quad [\text{排中律}]$$
$$\equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \quad [\Upsilon \wedge A \equiv A]$$
$$\equiv \neg (A_1 \wedge A_2) \quad [\text{ド・モルガンの法則}]$$

と簡単にできる（ここに現われた$\mathfrak{D}$と同値な8つの論理式に対応する真理関数は，いずれも同じものになる）．

これの逆として，任意の論理式$\mathfrak{A}$を $\vee$-標準形に直すには，$\mathfrak{A}$ に対応する真理関数を求め，これから定理8の証明の手順にしたがえばよいが，論理式を同値に変形して行くことによっても求められる．再び上の例をとると，

$$\neg (A_1 \wedge A_2)$$
$$\equiv \neg A_1 \vee \neg A_2$$
$$\equiv \{\neg A_1 \wedge (A_2 \vee \neg A_2)\} \vee \{\neg A_2 \wedge (A_1 \vee \neg A_1)\}$$

$$\equiv(\neg A_1\wedge A_2)\vee(\neg A_1\wedge\neg A_2)\vee(\neg A_2\wedge A_1)\vee(\neg A_2\wedge\neg A_1)$$
$$\equiv(\neg A_1\wedge A_2)\vee(\neg A_1\wedge\neg A_2)\vee(\neg A_2\wedge A_1)$$

途中計算を少し省略したが，本質的な変形はたとえば $\neg A_1$ に対し，これに含まれない命題変数 A_2 を用いて $\neg A_1$ を，これと同値な $\neg A_1\wedge(A_2\vee\neg A_2)$ でおきかえることであり，その他の変形にはトートロジー (1.1)～(1.8) が用いられる．

最後に，∨-標準形に双対な標準形とその求め方について述べよう．次のことが成り立つ．

n 個の命題変数をもつ任意の恒真ではない論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，論理記号として ∧, ∨, ¬ だけをもつ論理式 $\mathfrak{D}$ が対応し，項の順序を無視して一意にきまる．$\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{A}$ の命題変数 A_i またはそれの否定 $\neg A_i\,(i=1,\cdots,n)$ の n 個の論理和 $\mathfrak{C}_i$ を有限個 ($\leqq 2^n$) 論理積で結合した論理式として表わされ，$\models\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{D}$ が成り立つ．

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$ の∧-**標準形**（**積標準形**）(principal conjunctive normal form) という．

これの証明は定理8の証明の双対から導かれる．すなわち定理8の証明中，∨と∧をすべて入れかえ，したがって論理和と論理積を入れかえまた1と0を入れかえて（基本積に双対なものを**基本和**という)，これを読めばよい．

論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，∧-標準形を求めるには，さきに述べた方法の双対を考えればよい．例によって示そう．

例 $A_1\wedge\neg A_2$ の ∧-標準形を求めよう．$A_1\wedge\neg A_2$ の真理表は右のとおりであるから，$A_1\wedge\neg A_2$ が値0をとるのは第1，2，4行である．したがって，第1行より $\mathfrak{C}_1$ は $A_1\vee A_2$，第2行より $\mathfrak{C}_2$ は $A_1\vee\neg A_2$，第4行より $\mathfrak{C}_4$ は $\neg A_1\vee\neg A_2$ となる．したがって，求める ∧-標準形は

A_1	A_2	$A_1\wedge\neg A_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$(A_1\vee A_2)\wedge(A_1\vee\neg A_2)\wedge(\neg A_1\vee\neg A_2)$$

となる．

論理式 $\mathfrak{A}$ に対する∧-標準形を求めるには，$\neg\mathfrak{A}$ の∨-標準形を求め，これにド・モルガンの法則を用いる方法もある．上の例をこの方法によって求めよう．まず $\neg(A_1\wedge\neg A_2)$ を同値に変形すれば　$\neg(A_1\wedge\neg A_2)\equiv\neg A_1\vee\neg\neg A_2$

$\equiv \neg A_1 \vee A_2$ となり，これの真理表を用いて，∨-標準形を求めれば

$$\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \equiv (\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)$$

をうる．したがって，ド・モルガンの法則を用いれば，

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \neg A_2 &\equiv \neg\neg(A_1 \wedge \neg A_2) \\ &\equiv \neg\{(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)\} \\ &\equiv \neg(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \wedge \neg(\neg A_1 \wedge A_2) \wedge \neg(A_1 \wedge A_2) \\ &\equiv (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2) \end{aligned}$$

をうる．

1・2 命　題　計　算

前節で述べた命題論理においては，論理式の間の関係を，真偽という点に着目して調べてきた．しかし後に述べる述語論理に対しては，このような方法だけでは扱いきれなくなる．そのため，この節では命題論理を前節と違った立場から公理的な方法を用いて処理することを考える．前節のように論理式の内容に立入って真偽などを考えながら研究する立場を**セマンティックス**（semantics）といい，これに反し，この節で展開するように全く内容と無関係に形式的な構造だけについて研究する立場を**シンタックス**（syntax）という．

次に，論理の形式化は Hilbert などによる公理を中心とする方法と Gentzen などによる推論規則中心の方法に大別され，その他のいろいろの形式化もこの両者の中間に位置するものが多い．ここでは Hilbert の立場に近い一つの形式化を与え，これをもとにして，演繹定理，完全性，無矛盾性，独立性などの基本的な考え方を述べよう（Gentzen の立場からの形式化は第 3，4，5 章でとり扱う）．

A．命題計算の形式的体系

a．形式的体系　　命題論理，述語論理，自然数論，群論，実数論などの数学理論をシンタックスの立場から形式化した体系を一般に形式的体系（formal system）という．

定義 3　形式的体系 S とは，次の 1)～4) で定められる集合である．

1)　**記号**（symbol）を元とする可算集合

2)　**表現**（expression）を元とする可算集合（表現は記号の有限列からつく

られる）

3) **公理**（axiom）を元とするある集合（公理は表現の特定のものを表わしている）

4) **推論規則**（rule of inference）とよばれる図形の有限集合

（この有限集合を $\{R_i\}$ とするとき，R_i に対しては自然数 j が一意に定まり，任意の j 個の表現の集合 $\{\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_j\}$ および任意の表現 $\mathfrak{A}$ に対して，$\{\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_j\}$ が $\mathfrak{A}$ と R_i の関係にあるか否かが決定できる．このとき $\mathfrak{A}$ は $\{\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_j\}$ から推論規則 R_i によって**直接導かれている**という

$$\frac{\mathfrak{B}_1 \cdots\cdots\cdots \mathfrak{B}_j}{\mathfrak{A}} \quad R_i$$

とかく．）

注　定義3によれば，形式的体系 S とは，出発点となる公理（表現）とこれから新しい表現を導き出す推論規則の集合のことであり，記号，表現の集合は公理や推論規則を定義するために用いられるものである．以下具体例をあげて少し補足しよう．

S として体系 H_p を以下でとり扱うが，この場合記号としては論理記号や命題変数が定められ，表現としては論理式が，公理としては3つのタイプの論理式の集合が，そして推論規則としては modus ponens がきめられ，この体系に用いられることばがすべて定まる．形式的体系では真偽などの概念は全く導入されておらない．

S として LK［4·1 節参照］を考える場合には，記号としてはさらに変数記号などが加わり，表現としては論理式のほか，式という概念が加わる．公理はただ1つ $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ だけである（実質的には無限個ある）．推論規則は21個定められている．S として数学理論の形式化を考える場合の一例は第5章でとり扱われる．

定義 4　S における $\mathfrak{A}$ の**証明**（proof）とは，次の条件 1)，2) のいずれかを満足するような S の表現の有限列 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ $(\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A})$ をいう．すなわち各 i $(i=1, \cdots, n)$ に対して

1) $\mathfrak{A}_i$ は S の公理である．

2) $\mathfrak{A}_i$ が推論規則の一つによって，有限個の表現 $\mathfrak{A}_j$ $(j<i)$ から直接導かれている．

注　定義4による証明は**証明図**（proof-figure）ともいわれる．以上の形式的体系と証明図の概念はわれわれが今後研究の対象にする概念であり，日常用いている証明ということばとは区別をする必要がある．前者を**対象言語**（object language）といい，対象言語について議論するとき用いることばを**メタ言語**（metalanguage）という．

定義 5　$\mathfrak{A}$ が S の**定理**（theorem）であるとは，S における $\mathfrak{A}$ の証明が存在

するときをいう．

注 ここでいう定理は対象言語におけるものである．普通用いている定理ということばはメタ定理とよぶべきものである．

Sが公理系のとき，すなわちSの種類によってはSの任意の表現が公理であるかどうか決定できる場合でも，任意の表現がここでいう定理かどうかはわからないのであって，

定義 6 Sの任意の表現が定理であるかどうかを，有限回の手続きで決定することができるとき，S は**決定可能** (decidable) という．S が決定可能であるかどうか，および決定可能であるとき決定手続きを求める問題を，Sの**決定問題** (decision problem) という．**決定手続き** (decision procedure) を**アルゴリズム** (algorithm) ともいう．

定義 7 Sの表現のある集合をΓとする．

S の**表現** $\mathfrak{A}$ **が** $\boldsymbol{\Gamma}$ **から導かれる**とは，S の表現の列 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ が存在し，$\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}$ であり，各 i に対し次の 1)～3) のいずれかが成り立つときをいう．

1) $\mathfrak{A}_i$ はSの公理である．

2) $\mathfrak{A}_i$ は Γ に属している．

3) $\mathfrak{A}_i$ がSの推論規則の一つによって，有限個の表現 $\mathfrak{A}_j(j<i)$ から直接導かれている．

このとき，Γの元を $\mathfrak{A}$ の証明の**仮定** (hypothesis) という．

Sにおいて$\mathfrak{A}$がΓから導かれるとき，$\Gamma\vdash_S\mathfrak{A}$ と書く（まぎらわしくないときはSを省略することが多い）．

Γが有限集合 $\{\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_m\}$ のとき $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ を単に $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_m\vdash\mathfrak{A}$ と書く．とくにΓが空集合のとき，$\vdash\mathfrak{A}$ と書き，$\mathfrak{A}$は（Sで）で**証明可能** (provable) であるという（このとき$\mathfrak{A}$はSの定理である）．

b．命題計算 H_p 前節で述べたトートロジーのうち適当な論理式のタイプをいくつか公理としてえらび，また適当な推論規則を定めて形式的体系 H_p をつくり，どんなトートロジーも H_p の定理になるように H_p を定義しよう．

命題論理を形式的体系として表わした命題計算は，いろいろの形でつくることができるが，ここでは次の形のものを扱う．

定義 8 命題計算に対する形式的体系 H_p は次の 1)～4) で定義される．

1)　H_p の記号

論理記号　$\neg, \supset$

命題変数　$A_1, A_2, \cdots$

（補助記号として（　）を用いる）

2)　H_p の論理式を次のように帰納的に定義する．

1.　命題変数は論理式である．

2.　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が論理式ならば，$\neg(\mathfrak{A})$，$(\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B})$ は論理式である．

3.　以上 1，2 で論理式とわかったものだけが論理式である．

3)　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ を H_p の任意の論理式とするとき，次のものは H_p の公理である．

A 1　$\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$

A 2　$(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))$

A 3　$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$

4)　H_p の推論規則　　$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ から直接導かれる．すなわち $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}$ が成り立つ．この推論規則は

$$\frac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

の形で書き表わす．この推論規則を **modus ponens** という．以後 **MP** と略すことにする．

注 1　H_p は Hilbert 流に形式化した命題計算 propositional calculus の意味である．

注 2　A_1，A_2 を命題変数とするとき，$A_1\supset(A_2\supset A_1)$ を公理とし，代入の規則「論理式に現われる命題変数には任意の論理式を代入することができる」をゆるせば，無限に多くの論理式がえられるが，これらをまとめて一般的に $\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$ と表わしたのが公理 A 1 である．このような表わし方を公理のシェーマによる表わし方という．

定義 9　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を H_p の任意の論理式とするとき

$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$　を　$\neg(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})$　で

$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$　を　$\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$　で

$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$　を　$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$　で定義する．

注　H_p では論理記号として $\neg, \supset$ をえらび，他の論理記号は $\neg, \supset$ を用いて表わしているが，この場合 $\neg, \supset$ を**基本論理記号** (primitive logical symbol) という．

H_p における証明の一例として，$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示そう．

1.　$(\mathfrak{A}\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}))\supset((\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}))$　A 2 より

2.　$\mathfrak{A}\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A})$　A 1 より

3.　$(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})$　1, 2 に MP を用いて

4.　$\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})$　A 1 より

5.　$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$　3, 4 に MP を用いて

すなわち

$$\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A} \tag{1.19}$$

B. 演繹定理

われわれは通常，ある命題 $\mathfrak{A}$ を仮定して命題 $\mathfrak{B}$ を導き出し，このことから $\mathfrak{A}$ ならば $\mathfrak{B}$ であるという命題は正しいと結論をするわけであるが，このような推論の仕方は H_p では正しい．それは次の定理によって保証される．

定理 9（**演繹定理**，deduction theorem）　Γ を論理式のある集合，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ を論理式とするとき，H_p において

$$\Gamma, \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B} \Rightarrow \Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$$

が成り立つ．とくに Γ が空集合のときは $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B} \Rightarrow \vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ である．

証明　集合 Γ に，さらに論理式 $\mathfrak{A}$ を元として付け加えてできる集合を $\Gamma\cup\{\mathfrak{A}\}$ とする．仮定より $\Gamma\cup\{\mathfrak{A}\}$ から $\mathfrak{B}$ を導く証明があるからこれを $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ とし，$\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}$ とする．(このとき Γ から $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ を導く証明は $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_n$ によって与えられることを示そう)．すべての $i(1\leqq i\leqq n)$ について $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_i$ が成り立つことを，i に関する帰納法で証明する．

$i=1$ のとき，$\mathfrak{B}_1$ は Γ に属するか，H_p の公理か，または $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{A}$ のうちのいずれかである．公理 A 1 より $\mathfrak{B}_1\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_1)$ は公理であるから，$\mathfrak{B}_1$ が Γ に属するかまたは公理のときは，MP を用いて $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_1$ をうる．$\mathfrak{B}_1=\mathfrak{A}$ のときは $\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ より $\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_1$ が成り立つ．

次に $i>1$ のとき，$k<i$ なるすべての k について $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_k$ が成り立つと仮定する．$\mathfrak{B}_i$ は次の 4 とおりのうちのいずれかである．

①　$\mathfrak{B}_i$ は Γ に属する．②　H_p の公理　③　$\mathfrak{B}_i=\mathfrak{A}$　④　$\mathfrak{B}_i$ はある $\mathfrak{B}_j$ および $\mathfrak{B}_j\supset\mathfrak{B}_i$（ただし $j<i$）から MP によって導かれる．

①〜③ の場合は $i=1$ の場合と同じようにして $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}_i$ をうる．④の場

合，帰納法の仮定から $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_j$ および $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B}_j \supset \mathfrak{B}_i)$ が成り立っている．ところで公理 A 2 より

$$\vdash (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B}_j \supset \mathfrak{B}_i)) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_j) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_i))$$

これと $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B}_j \supset \mathfrak{B}_i)$ より MP を用いて

$$\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_j) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_i)$$

再び $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_j$ と MP を用いて $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_i$ をうる． *qed*∎

注 定理 9 の証明には公理 A 1，A 2 しか用いていない．H_p から公理 A 3 を除いた公理系で演繹定理と MP が成り立つのであるが，逆にこの 2 つの推論を仮定すれば公理 A 1，A 2 が導ける．

以後しばしば用いられる推論を証明する．

定理 10

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C} \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C} \qquad [1.1]$$

$$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}),\ \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C} \qquad [1.2]$$

証明

1) 1. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ 仮定
2. $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$ 仮定
3. $\mathfrak{A}$ 仮定
4. $\mathfrak{B}$ 1，3 に MP を用いて
5. $\mathfrak{C}$ 2，4 に MP を用いて

∴ $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C},\ \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$

これに演繹定理を用いて $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C} \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$ をうる．

2) 1. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})$ 仮定
2. $\mathfrak{A}$ 仮定
3. $\mathfrak{B}$ 仮定
4. $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$ 1，2； MP
5. $\mathfrak{C}$ 3，4； MP

∴ $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}),\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$

これに演繹定理を用いて，$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}),\ \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$ をうる． *qed*∎

定理 11 任意の論理式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ に対し，次の論理式は H_p で証明可能である．

$$\neg\neg\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A} \qquad (1.20)$$

$$\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A} \tag{1.21}$$

$$\neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \tag{1.22}$$

$$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \tag{1.23}$$

$$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}) \tag{1.24}$$

$$\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})) \tag{1.25}$$

$$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{B}) \tag{1.26}$$

証明

(1.20)	1.	$(\neg\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A})$	A 3
	2.	$\neg\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A}$	(1.19)
	3.	$(\neg\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}$	1, 2; [1.2]
	4.	$\neg\neg\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A})$	A 1
	5.	$\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$	3, 4; [1.1]
	∴	$\vdash\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$	
(1.21)	1.	$(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})\supset\neg\neg\mathfrak{A})$	A 3
	2.	$\neg\neg\neg\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A}$	(1.20)
	3.	$(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})\supset\neg\neg\mathfrak{A}$	1, 2; MP
	4.	$\mathfrak{A}\supset(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A})$	A 1
	5.	$\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A}$	3, 4; [1.1]
	∴	$\vdash\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A}$	
(1.22)	1.	$\neg\mathfrak{A}$	仮定
	2.	$\mathfrak{A}$	仮定
	3.	$\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$	A 1
	4.	$\neg\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})$	A 1
	5.	$\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$	2, 3; MP
	6.	$\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}$	1, 4; MP
	7.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$	A 3
	8.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B}$	6, 7; MP
	9.	$\mathfrak{B}$	5, 8; MP

∴ $\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ これに演繹定理を2回用いて

$\neg\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ したがって $\vdash\neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$

(1.23)	1.	$\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}$	仮定
	2.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$	A 3
	3.	$\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$	A 1
	4.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B}$	1, 2 ; MP
	5.	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$	3, 4 ; [1.1]

∴ $\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ 演繹定理を用いて

$$\vdash(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$$

(1.24)	1.	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$	仮定
	2.	$\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$	(1.20)
	3.	$\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$	1, 2; [1.1]
	4.	$\mathfrak{B}\supset\neg\neg\mathfrak{B}$	(1.21)
	5.	$\neg\neg\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{B}$	3, 4; [1.1]
	6.	$(\neg\neg\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})$	(1.23)
	7.	$\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}$	5, 6; MP

∴ $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}$ 演繹定理を用いて

$$\vdash(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})$$

(1.25) MP より $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}$ だから，演繹定理より

$$\vdash\mathfrak{A}\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{B})$$

(1.24) より $\vdash((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}))$

∴ [1.1] を用いて $\vdash\mathfrak{A}\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}))$

(1.26)	1.	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$	仮定
	2.	$\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$	仮定
	3.	$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})$	(1.24)
	4.	$\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}$	1, 3; MP
	5.	$(\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\neg\mathfrak{A})$	(1.24)
	6.	$\neg\mathfrak{B}\supset\neg\neg\mathfrak{A}$	2, 5; MP
	7.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$	A 3
	8.	$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B}$	6, 7; MP
	9.	$\mathfrak{B}$	4, 8; MP

$$\therefore \quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B} \quad \text{演繹定理を2回用いて}$$

$$\vdash(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{B})$$ *qed*

なおこのほか Peirce による

$$((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A} \tag{1.27}$$

もまた H_p で証明可能な論理式である．

C．完全性定理

H_p の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，1.1 節で定義した付値を与え，これによって恒真の概念を定義したとき，H_p の論理式 $\mathfrak{A}$ が H_p で恒真であるための必要かつ十分な条件は，$\mathfrak{A}$ が H_p で証明可能であることを証明しよう．まず

定理 12 $\mathfrak{A}$ が H_p で証明可能 $\Rightarrow \mathfrak{A}$ は H_p で恒真 $(\vdash\mathfrak{A}\Rightarrow\models\mathfrak{A})$

証明 H_p の公理 A 1〜A 3 がトートロジーであることは，真理表を用いて容易に確かめることができる．また定理 1 より，MP は二つのトートロジーからトートロジーを導く（このことを 推論規則 MP はトートロジーであるという性質を伝える という）．したがって，$\mathfrak{A}$ が H_p で証明可能ならば，$\mathfrak{A}$ は H_p でトートロジーである． *qed*

定理 12 の逆を述べる前に，次の定理を述べる．

定理 13 $\mathfrak{A}$ を H_p の任意の論理式とし，$\mathfrak{A}$ に現われる命題変数を $A_1, \cdots, A_k$ とする．$\mathfrak{A}$ の一つの付値が与えられたとき，A_i' を次のように定義する．

A_i が値 1 をとれば，$A_i'=A_i$

A_i が値 0 をとれば，$A_i'=\neg A_i$

またこの同じ付値に対して，$\mathfrak{A}'$ を次のように定義する．

$\mathfrak{A}$ が値 1 をとれば，$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ が値 0 をとれば，$\mathfrak{A}'=\neg\mathfrak{A}$

このとき $A_1', \cdots, A_k'\vdash\mathfrak{A}'$ が成り立つ．

証明 $\mathfrak{A}$ には $\neg$, $\supset$ 以外に論理記号は含まれていないと仮定し，$\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号の数 n についての帰納法で証明する．

$n=0$ のとき，$\mathfrak{A}$ は命題変数 A_1 に等しいから，A_1 が値 1 をとるか 0 をとるかにしたがって，$A_1\vdash A_1$ および $\neg A_1\vdash\neg A_1$ を示せばよいがこれは明らかに成り立つ．

$n>0$ のとき，$i<n$ なるすべての i について定理が成り立っていると仮定し，

$\mathfrak{A}$の一番外側の記号で分類する．

1) $\mathfrak{A}$が$\neg\mathfrak{B}$のとき　$\mathfrak{B}$の論理記号の個数は$\mathfrak{A}$の論理記号の個数より1小さく，$\mathfrak{B}$については帰納法の仮定が成り立つ．与えられた付値に対し，$\mathfrak{B}$が値1をとるか0をとるかでさらに分類する．

（i） $\mathfrak{B}$が値1をとるとき，$\mathfrak{A}$は値0をとる．∴ $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'=\neg\mathfrak{A}$

帰納法の仮定より，$A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{B}$, したがって (1.21) と MP より

$A_1', \cdots, A_k' \vdash \neg\neg\mathfrak{B}$. $\neg\neg\mathfrak{B}=\mathfrak{A}'$ だから $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}'$

（ii） $\mathfrak{B}$が値0をとるとき，同じようにして，$\mathfrak{B}'=\neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$

帰納法の仮定より，$A_1', \cdots, A_k' \vdash \neg\mathfrak{B}$. $\neg\mathfrak{B}=\mathfrak{A}'$ だから

$A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}'$

2) $\mathfrak{A}$が$\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$のとき　$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$の論理記号の個数は$\mathfrak{A}$の論理記号の個数より小さいから，帰納法の仮定より　$A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{B}'$, $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{C}'$ は成り立つ．与えられた付値に対し，$\mathfrak{B}$が値0をとるとき，$\mathfrak{C}$が値1をとるとき，および，$\mathfrak{B}$が値1，$\mathfrak{C}$が値0をとるときの三つに分類する．

（i） $\mathfrak{B}$が値0をとるとき，$\mathfrak{A}$は値1をとる．したがって $\mathfrak{B}'=\neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$ 帰納法の仮定より $A_1', \cdots, A_k' \vdash \neg\mathfrak{B}$ ∴ (1.22) を用いて $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$. $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{A}'$ だから $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}'$

（ii） $\mathfrak{C}$が値1をとるとき，$\mathfrak{A}$は値1をとる．したがって $\mathfrak{C}'=\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$ 帰納法の仮定より $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{C}$ ∴ 公理 A 1 より $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$ $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{A}'$ だから $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}'$

（iii） $\mathfrak{B}$が値1，$\mathfrak{C}$が値0をとるとき，$\mathfrak{A}$は値0をとる．したがって，$\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'=\neg\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'=\neg\mathfrak{A}$ である．帰納法の仮定より，$A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{B}$, $A_1', \cdots, A_k' \vdash \neg\mathfrak{C}$, ∴ (1.25) より $A_1', \cdots, A_k' \vdash \neg(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$. $\neg(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})=\mathfrak{A}'$ だから $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}'$ をうる． *qed*

例 $\mathfrak{A}$を$\neg(\neg A_1\supset A_2)$とするとき$\mathfrak{A}$の真理表は右のようになる．定理 13 の主張していることは次の4つの推論が成り立つことである．

A_1	A_2	$\neg(\neg A_1\supset A_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\neg A_1, \neg A_2 \vdash \neg(\neg A_1\supset A_2)$$

$$\neg A_1, A_2 \vdash \neg\neg(\neg A_1\supset A_2)$$

$$A_1, \neg A_2 \vdash \neg\neg(\neg A_1\supset A_2)$$

$A_1, A_2 \vdash ㇷㇷ(ㇷA_1 \supset A_2)$

定理 14（完全性定理， completeness theorem）　$\mathfrak{A}$ が H_p で恒真 $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は H_p で証明可能　（$\models \mathfrak{A} \Rightarrow \vdash \mathfrak{A}$）

証明　$\mathfrak{A}$ を H_p のトートロジーと仮定し，$\mathfrak{A}$ に現われる命題変数を $A_1, \cdots, A_k$ とする．$\mathfrak{A}$ の任意の付値に対し，定理 13 より $A_1', \cdots, A_k' \vdash \mathfrak{A}$ が成り立つ（∵ $\mathfrak{A}$ はトートロジーであるから $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$ である）．したがって，A_k が値 1 をとり，$A_1, \cdots, A_{k-1}$ が任意の値をとる付値をえらべば $A_1', \cdots, A_{k-1}', A_k \vdash \mathfrak{A}$ が成り立ち，また A_k が値 0 をとり，$A_1, \cdots, A_{k-1}$ が上と同じ値をとる付値をえらべば，$A_1', \cdots, A_{k-1}', ㇷA_k \vdash \mathfrak{A}$ も成り立つ．したがって $A_1, \cdots, A_{k-1}$ の任意の付値に対して定義した $A_1', \cdots, A_k'$ について

$$A_1', \cdots, A_{k-1}' \vdash A_k \supset \mathfrak{A} \quad \text{および}$$

$$A_1', \cdots, A_{k-1}' \vdash ㇷA_k \supset \mathfrak{A}$$

が成り立つから，(1.26) を用いて A_k の項を消し

$$A_1', \cdots, A_{k-1}' \vdash \mathfrak{A}$$

をうる．この操作を k 回くりかえすことにより $\vdash \mathfrak{A}$ をうる．　*qed*

定理 12 および定理 14 をまとめて

定理 15　H_p の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し

$\mathfrak{A}$ が H_p で証明可能 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ が H_p で恒真

が成り立つ．すなわち H_p の定理の全体と，H_p のトートロジーの全体は集合として一致する．

D．無矛盾性，独立性

a．公理系の無矛盾性

定義 10　形式的体系 S においてある論理式 $\mathfrak{A}$ が存在し，$\mathfrak{A}$ とその否定 $ㇷ\mathfrak{A}$ がともに S で証明可能のとき，S は**矛盾する**（inconsistent）といい，S が矛盾しないとき，S は**無矛盾**（consistent）**である**という．

定理 16　命題計算 H_p は無矛盾である．

証明　$\mathfrak{A}$ と $ㇷ\mathfrak{A}$ がともに H_p で証明可能であるような論理式 $\mathfrak{A}$ が存在しないことを示せばよい．もし，$\mathfrak{A}$ と $ㇷ\mathfrak{A}$ がともに H_p で証明可能であるとすれば定理 15 から $\mathfrak{A}$ と $ㇷ\mathfrak{A}$ はともにトートロジーにならねばならないが，このようなことはおこりえない．　*qed*

注　なお一般に形式的体系 S が推論規則として MP をもち，また S で (1.22) が成り立っている場合には（H_p はこの条件をみたしているが）「S が無矛盾である $\Longleftrightarrow$ S の論理式の中に S で証明可能でないものが存在する」が成り立つ．何故なら S が無矛盾であるとすれば，S に証明可能な論理式がない場合は明らかであるから，証明可能な論理式 $\mathfrak{A}$ があるとする．このとき $\neg\mathfrak{A}$ を考えれば $\neg\mathfrak{A}$ は証明可能ではない．

逆に S が矛盾であるとすれば，ある論理式 $\mathfrak{A}$ が存在し $\mathfrak{A}$ も $\neg\mathfrak{A}$ もともに証明可能となる．(1.22) より $\vdash_S \neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ だから MP を2回用いると任意の論理式 $\mathfrak{B}$ が証明可能となる．

b．公理系の独立性

定義 11　シェーマで与えられた形式的体系 S において，公理 A 1, A 2, … Am の集合を X とするとき，X が**独立** (independent) であるとは，X の公理 An($1\leqq n\leqq m$) を任意にえらんだとき，X の An 以外の公理から S の推論規則を用いて導けないような論理式で，An に属するものが存在するときをいう．

定理 17　H_p の公理 A 1〜A 3 は独立である．

証明　(A 1 の独立性)　次のような真理表を与える（0，1，2 は全く内容のない単なる記号であり真偽という意味はもっていないが，強いて考えれば記号 0 がいままでの真に対応する）．

$\mathfrak{A}$	$\neg\mathfrak{A}$
0	1
1	1
2	0

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

任意の論理式 $\mathfrak{A}$ にこの真理表にしたがって付値を与えれば，一般には $\mathfrak{A}$ は値として 0，1，2 をとるがどんな付値に対しても $\mathfrak{A}$ が常に値 0 をとるとき，$\mathfrak{A}$ を仮に「0 値をとる」とよぶことにする．

さて MP は 0 値をとるという性質を保つ．すなわち $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ が 0 値をとるならば $\mathfrak{B}$ もまた 0 値をとる（$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ の表の第1行目より）．また公理 A2，A3 も 0 値をとることが確かめられる．したがって，A2，A3 に MP を用いて導かれる論理式はすべて 0 値をとる．さてもし A 1 が A2，A3 から導くことができると仮定すれば，上述のことより A1 の特別の場合として $A\supset(B\supset A)$ もまた常に 0 値をとるはずである．しかし $A=1$，$B=2$ の値に対し $A\supset(B\supset A)$ は値 2 をとるから不合理である．∴　A1 は A2,

A3 から導くことはできない.

(A2 の独立性) 右のような真理表を与える. MP が 0 値をとるという性質を保つこと, および公理 A1, A3 が 0 値をとることは容易にたしかめられるが, A2 の

$$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$$

は A が 0, B が 0, C が 1 の値をとるとき 2 の値をとる.

$\mathfrak{A}$	$\neg\mathfrak{A}$
0	1
1	0
2	1

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	0
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

(A3 の独立性) 論理式 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号 ㇇ をすべて消去してできる新しい論理式を $[\mathfrak{A}]$ と書くことにする. $\mathfrak{A}$ が A1 あるいは A2 の場合には $[\mathfrak{A}]$ はトートロジーである. また MP は $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{A}]\supset[\mathfrak{B}]\vdash[\mathfrak{B}]$ となるから (∵ $[\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}]=[\mathfrak{A}]\supset[\mathfrak{B}]$) トートロジーという性質を保ち, したがって, A1, A2 から MP で導かれる論理式 $\mathfrak{A}$ はすべて $[\mathfrak{A}]$ がトートロジーであるという性質をもっている.

ところで A3 の一つの論理式に [ ] をつけた論理式

$$[(\neg A\supset\neg A)\supset((\neg A\supset A)\supset A)]$$

は $(A\supset A)\supset((A\supset A)\supset A)$ となりこれは明らかにトートロジーでない. したがって $(\neg A\supset\neg A)\supset((\neg A\supset A)\supset A)$ は A1, A2 より MP によって導くことはできない. *qed*

第2章　述　語　論　理

第２章では述語論理を扱う．第１章で述べた公理的な方法を用いて命題論理を述語論理に拡張すれば，これを用いて一般の数学理論を形式的にとり扱うことが可能となる．2·1 節では数学理論を形式的に展開するための一般論を扱う．また述語論理を Hilbert 流に展開するが，ここでは形式的な計算については一切省略し第３，４章にゆずる．次に述語命題が恒真であることを定義するためにフレームおよびモデルについて述べる．2·2 節では述語論理体系の完全性についての重要な定理を述べる．これから恒真な命題だけがちょうど導かれるように，うまく述語論理が公理化されているという保証がえられる．この章のうち後半はかなり面倒なところであり，またあとの章との関連も少ないので，本章の前半を一読したのち第３章に入るのも一つの方法であろう．第１章および第２章で Hilbert 流の論理体系の概要を紹介したことになる．

2·1　述　語　論　理

A．数学理論の形式的展開

a．数学的命題の展開，言語　　ある数学理論，たとえば自然数論に現われるいろいろの命題を形式的に表わすことを考えよう．自然数論でとり扱われる最も基本的な対象は自然数 1，2，3，…（0を自然数に含ませることもある）であるが，一般の自然数を表わすには変数として a, b, c, …や x, y, z, …などを用いる．次に，これらの対象から新しい対象をつくり出す関数として，＋，· などが用いられ，$2 \cdot a+3$ のような一般化された対象がえられる．さらにこれら一般化された対象の間の関係（述語ともいう）を表わす記号として，＝や＜などの述語（これらはともに２変数の述語）を用い，たとえば $a+1>2$，すべての x について $x=x$ である，ある x について $x+1=b$ が成り立つ，などの（変数の記号を用いた）命題がつくられる．

したがって，これら基本となる対象，一般化された対象，変数を含む命題などの形式化，および「ある x について」，「すべての x について」などを表わすためには，第１章で述べた命題論理を述語を含む論理体系まで拡張しなければな

らない．そのため記号として次に述べる（1）〜（6）を用いることにする．

（1） **対象定数**（individual constant）c_i $(i=0,1,2,\cdots)$　c_i の集合Dを**対象領域**という．Dは空ではない．

（2） **自由変数**（free variable）a_i $(i=0,1,2,\cdots)$　$a, b, c, \cdots$を用いることもある．

（3） **束縛変数**（bound variable）x_i $(i=0,1,2,\cdots)$　$x, y, z, \cdots$を用いることもある．（2），（3）は（1）に対して**対象変数**といわれる．

（4） **関数記号**（function symbol）f_i^n $(n=1, 2, \cdots;\ i=0, 1, 2, \cdots)$　f_i^n をn変数の関数記号といい，$f_i^n(*_1, \cdots, *_n)$ と書くこともある．nを f_i^n の**変数場所**（argument place）の個数という．iは関数記号が一般に可算個あることを示しているが，関数記号は全くなくてもよい．単に f_i, f^n, f, g などと省略することもある．

（5） **述語記号**（predicate symbol）　P_i^n $(n=1,2,\cdots;\ i=0,1,2,\cdots)$　P_i^n をn変数の述語記号といい，$P_i^n(*_1, \cdots, *_n)$ と書くこともある．nを P_i^n の変数場所の個数という．（述語論理では）述語記号は少なくも一つは必要である．可算個以上あってもよい．単に P_i, P^n, P などと省略することもある．

（6） **論理記号**（logical symbol）　$\neg, \wedge, \vee, \supset, \forall, \exists$

注　対象定数は，数学理論でとり扱われる対象を形式的に表わしたもので数学理論が自然数論のときには 0, 1, 2, … に対応している．自由変数および束縛変数は対象定数を一般的に表わすときに用いる．論理記号 $\forall, \exists$ とともに用いるときには束縛変数が用いられる．関数記号 f_i^n は数学理論におけるn変数の関数，すなわちDのn個の直積 D^n からDへの一意写像に対応する記号として用いられる．述語記号 P_i^n は数学理論においてはn変数の述語，すなわちn個の対象間の関係に対応する記号として用いられ，とくに $n=0$ のときは命題変数として用いられる．論理記号は通常これらのうち適当なものたとえば $\neg, \supset, \forall$ を基本論理記号としてえらび，他の記号は基本論理記号を用いて定義する．

定義 1

1） 対象定数は項である．

2） 自由変数は項である．

3） $t_1, \cdots, t_n$ が項であり，f^n がn変数の関数記号であれば $f^n(t_1, \cdots, t_n)$

は項である.

4) 以上の 1)～3) で項であることがわかるものだけが**項** (term) である. とくに自由変数を含まない項を**閉項** (closed term) という.

例 c_2, a_3, $f_1^2(c_2, a_3)$, $f_2^2(f_1^2(c_2, a_3), c_5)$ などはいずれも項であり, 2, a, $2a$, $2a+5$ などの一般化された対象を形式化したものである.

定義 2

1) $t_1, \cdots, t_n$ が項であり, P が n 変数の述語記号のとき, $P(t_1, \cdots, t_n)$ は論理式である.

2) $\mathfrak{A}$ が論理式ならば, $\neg\mathfrak{A}$ は論理式である. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が論理式ならば, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ はいずれも論理式である.

3) $\mathfrak{F}(a)$ が論理式で, a が自由変数のとき, $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ および $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ は論理式である. ただし $\mathfrak{F}(a)$ は論理式 $\mathfrak{F}$ の中のいくつかの a を指定していることを表わし, $\mathfrak{F}(x)$ は, $\mathfrak{F}(a)$ に現われない任意の束縛変数を x としたとき, $\mathfrak{F}(a)$ で指定された a に x を代入したものを表わす.

4) 以上 1)～3) で論理式とわかったものだけが**論理式** (formula) である.

とくに自由変数を含まない論理式を**閉論理式** (closed formula) という. また定義 2 の 1) でつくられた (論理記号を含まない) 論理式 $P(t_1, \cdots, t_n)$ を**素論理式** (prime formula) という.

$\forall x$ を**全称作用素** (universal quantifier), $\exists x$ を**存在作用素** (existential quantifier) といい, 両方あわせて**限定作用素** (quantifier) という. また $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$, $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ において $\mathfrak{F}(x)$ を限定作用素の**適用範囲** (scope) という.

注 $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$, $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ はそれぞれ「すべての x について, $\mathfrak{F}(x)$ が成り立つ」「ある x が存在して, $\mathfrak{F}(x)$ が成り立つ」という内容を表わしている.

(1)～(6) によって数学理論で用いられることばが形式的に表わされることになる. 普通 (2), (3), (6) はいろいろの理論を扱うとき一定しているので, (1), (4), (5) の記号の個数や種類を定めたとき, 一つの**言語** (language) ***L* が定められた**という. 今後, 具体的な数学理論を考察の対象としていないときは, 任意に一つ言語 L が定められているものと仮定する.

b. 数学的理論の展開 数学的理論の形式化, すなわち形式的体系をつく

るには a で述べた記号および表現の形式化，したがって一つの言語を定める必要のほか，さらに公理と推論規則を与えねばならない［1.2 節A項参照］.

1. 公理は次の二つから成り立っている.

i）**論理的公理**（logical axiom）　これはすべての数学理論に共通に成り立つと仮定せられている論理式で次のものから成り立っている.

① トートロジーに含まれるすべての命題変数にそれぞれ任意の論理式を代入して得られる論理式はすべて論理的公理である.

② A4　$\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(t)$

A5　$\mathfrak{F}(t)\supset\exists x\,\mathfrak{F}(x)$

は論理的公理である．ただし，$\mathfrak{F}(t)$ は $\mathfrak{F}(x)$ のすべての x に，項 t を代入したものを表わす.

ii）**数学的公理**（mathematical axiom）（公準ともいわれる）　これはとり扱う数学理論に固有な公理である．数学的公理の集合を，その数学理論に対する**公理系**（axiom system）という.

2. **推論規則**（rule of inference）　すでに Hp で述べた推論規則のほか，∀ および ∃についての推論規則がつけ加わる．すなわち

R 1　$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}$　　(MP)

R 2　$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(a)\vdash\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)$

R 3　$\mathfrak{F}(a)\supset\mathfrak{A}\vdash\exists x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{A}$

は推論規則である．ただし，R 2，R 3 における a は $\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{F}(x)$ にも含まれないような自由変数とする.

定義 3　**a** および **b** で規定された体系を**（第 1 階）述語論理の上の形式的体系**という．またこの体系が数学的公理を全く含まないとき，この体系を**（第 1 階）述語計算**（predicate calculus of 1st order）といい，Hq で表わす.

注　第 1 階というのは限定作用素 $\forall x$ および $\exists x$ に用いられる変数 x が，対象領域を変域とするものに限られている場合をいう．述語記号 P を変数として $\forall P$ や $\exists P$ をゆるす述語計算を第 2 階という．ここでは第 1 階といちいちことわらない.

以上の定義を，基本論理記号として ¬，⊃，∀ を用いた場合についてまとめておくと，

定理 1 定義3で規定された述語論理の上の形式的体系とは，次の1～4で定められる形式的体系と同値である．

1. 記号

（1） 対象定数 c_i （2） 自由変数 a_i （3） 束縛変数 x_i

（4） 関数記号 f_i^n （5） 述語記号 P_i^n［（1）～（5）は上で述べたものと同一］ （6） 論理記号 $\supset, \neg, \forall$

2. 表現

論理式（定義2），項（定義1）

3. 公理

i） 論理的公理

A 1 $\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$

A 2 $(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))$

A 3 $(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$

A 4 $\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(t)$

ii） 数学的公理

4. 推論規則

R 1 $\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\ \vdash\ \mathfrak{B}$ (MP)

R 2 $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(a)\ \vdash\ \mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)$

ただし，a は $\mathfrak{A}$ にも $\mathfrak{F}(x)$ にも含まれない自由変数とする．

注 この体系が数学的公理を全く含まないとき，この体系が述語計算 Hq と同値になることは $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, $\exists x\mathfrak{F}(x)$ をそれぞれ $\neg(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$, $\neg\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ で定義することによって容易にたしかめることができる．

B. フレーム

a. フレーム 前項Aで述べたように，言語 L とは自然数論，実数論，集合論などいろいろの数学理論に現われる具体的な用語を一般的に形式化したものであった．したがって，L に現われるものは意味のない記号の列にすぎない．L の論理式は，これを構成している各記号が具体的に何を表わすかという**解釈** (interpretation) が与えられたとき，始めて意味をもってくる．そして論理式が正しいかどうかが定義できる．このように L に解釈として与えられる具体的な対象とその解釈一対応一をフレームということにする．フレームの定義を厳

密に述べれば次のとおりである.

定義 4

1)　M を空でない集合とし, **フレームの領域**という.

2)　$\bar{c}_i\,(i=0,1,2,\cdots)$. ただし $\bar{c}_i \in M$ とする. L の対象定数 c_i から $\bar{c}_i$ への写像を ρ で表わす ($\bar{c}_i$ は L の対象定数に対応する具体的な対象を表わしている).

3)　$\bar{f}_i^n\,(n=1,2,\cdots;\ i=0,1,2,\cdots)$. ただし f_i^n を n 変数の関数記号とするとき, $\bar{f}_i^n$ は M の n 個の直積 M^n から M への一意写像 (M の operation) である. L の関数記号 f_i^n から $\bar{f}_i^n$ への写像を σ で表わす ($\bar{f}_i^n$ は L の関数記号に対応する具体的な対象を表わしている).

4)　$\bar{P}_i^n(n=1,2,\cdots;\ \ i=0,1,2,\cdots)$. ただし P_i^n を n 変数の述語記号とするとき, $\bar{P}_i^n$ は M の n 個の直積 M^n の部分集合である. すなわち, $\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ の形の元からなるある集合を表わし, $v_i \in M$ である. L の述語記号 P_i^n から $\bar{P}_i^n$ への写像を τ で表わす ($\bar{P}_i^n$ は L の述語記号に対応する具体的な対象—M の n 個の元のある関係—をみたす順序対の全体を表わしている).

以上 1)～4) の集合 $\mathfrak{M}=[M;\ \rho;\ \sigma;\ \tau]$ を L の一つの**フレーム** (frame) という.

注　$\bar{f}_i^n$, $\bar{P}_i^n$ も簡単に $\bar{f}_i$, $\bar{P}_i$ と略すことが多い. $\mathfrak{M}$ は L のすべての記号や表現を集合 M に関する記号や命題などに対応させるはたらきをもっている. 対応 ρ, σ, τ のかわりに対応する M の元を用いて

$$\mathfrak{M}=[M;\ \bar{c}_0,\ \bar{c}_1,\cdots;\ \bar{f}_0,\ \bar{f}_1,\cdots;\ \bar{P}_0,\ \bar{P}_1,\cdots]$$

と書くこともある.

例　言語 L の論理式としてたとえば $P_0^2(a_1,a_2)$, $\forall x_1 P_0^2(a_1,x_1)$ などが与えられたとし, $P_0^2(*_1,*_2)$ は自然数論における述語 $*_1 \leqq *_2$ に対応する記号として用いられているとする. L のフレームを一つ定めたとき, M として自然数の集合をえらんだとする.

$P_0^2(a_1,a_2)$ に対して $\bar{P}_0^2$ は集合 $\{\langle x,y\rangle | x\leqq y\}$ を表わしており, $P_0^2(a_1,a_2)$ は $\bar{P}_0^2$ の元 $\langle x,y\rangle$ によってみたされる. また $\forall x_1 P_0^2(a_1,x_1)$ は, すべての自然数 x_1 に対して, $a_1\leqq x_1$ が成り立つという性質を表わしており, $a_1=0$ のときだけみたされる. さらに $\exists x_2 \forall x_1 P_0^2(x_2,x_1)$ を考えれば, これは, どんな自然数 x_1 に対しても, $x_2\leqq x_1$ が成り立つような x_2 が存在する. すなわち最

小の自然数が存在することを表わす命題であり，Mが自然数の集合のときは真な命題を表わしているが，フレームを変えて，Mを整数の集合とすれば偽な命題となる．このように論理式によっては，フレームの定め方により真にも偽にもなることができるのである．

b．「みたされる」の定義　　ここでは言語LおよびLのフレーム$\mathfrak{M}$を一つ固定して考えることにし（定義8まで），Lの論理式がフレーム$\mathfrak{M}$によってみたされるという概念を定義する．

$\mathfrak{M}$の領域Mの元からつくられた可算列を$\mathfrak{M}$の**点列**といい，$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ などで表わす．$\mathfrak{M}$の二つの点列

$$\mathfrak{m}=(m_0, m_1, m_2, \cdots),\ \ \mathfrak{n}=(n_0, n_1, n_2, \cdots),\ \ m_i \in M,\ \ n_i \in M$$

に対し，$i \neq j$ ならば $m_j=n_j$ であるとき $\mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ と書くことにする．そこでLの項，論理式などをフレーム$\mathfrak{M}$の元によって解釈することから始めよう．

定義 5　tをLの項とするとき，$t[\mathfrak{m}]$ を次のように定義する．

1）　t が自由変数 a_i のとき，$t[\mathfrak{m}]=m_i$

2）　t が対象定数 c_i のとき，$t[\mathfrak{m}]=\bar{c}_i$

3）　t が $f^n(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，$t[\mathfrak{m}]=\bar{f}^n(t_1[\mathfrak{m}], \cdots, t_n[\mathfrak{m}])$

例　Lの項tがたとえば $f_2{}^2(a_3, f_1{}^2(a_1, c_4))$ であるとする．Lのフレームを$\mathfrak{M}$として，領域Mは整数の集合，$\bar{f}_1{}^2(*_1, *_2)$ は $*_1+*_2$, $\bar{f}_2{}^2(*_1, *_2)$ は $*_1 \cdot *_2$ で，c_4 はMの指定された元，たとえば整数3であるとすれば，$\mathfrak{M}$の任意の点列$\mathfrak{m}$に対し，$t[\mathfrak{m}]=\bar{f}_2{}^2(m_3,\ \bar{f}_1{}^2(m_1,\ 3))=m_3\cdot(m_1+3)$ となる．m_1, m_3 はMの元だから，$t[\mathfrak{m}]$ もMの元になっていることがわかる．このように$t[\mathfrak{m}]$とは直観的にいえば，tに現われる自由変数を$\mathfrak{m}$の元でおきかえ，tに現われる関数記号には，$\mathfrak{M}$の対応する関数をおきかえてえられるMの元のことである．

定理 2　tをLの項，$\mathfrak{m}$を$\mathfrak{M}$の点列とすれば，$t[\mathfrak{m}] \in M$ である．

証明　tに含まれる関数記号の個数についての帰納法を用いる．tが自由変数 a_i のとき $t[\mathfrak{m}]=m_i \in M$, tが対象定数 c_i のとき $t[\mathfrak{m}]=\bar{c}_i \in M$ は定義5より明らかであるからtが $f^n(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，各 $t_i[\mathfrak{m}] \in M$ とすると $\langle t_1[\mathfrak{m}], \cdots, t_n[\mathfrak{m}] \rangle \in M^n$ であり，$\bar{f}^n$ は M^n から M の中への一意写像であるから，

$$t[\mathfrak{m}]=f^n(t_1,\cdots,t_n)[\mathfrak{m}]=\bar{f}^n(t_1[\mathfrak{m}],\cdots,t_n[\mathfrak{m}])\in M$$

である. *qed*

次に，Lの任意の論理式$\mathfrak{A}$に，フレーム$\mathfrak{M}$の点列$\mathfrak{m}$を代入したとき，$\mathfrak{A}$が成り立つという概念を帰納的に次のように定義する.

定義 6 Lの論理式$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$の点列$\mathfrak{m}$について，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{A}$を次のように定義する.

1) $\mathfrak{A}$が素論理式のとき

$$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models P_i^n(t_1,\cdots,t_n) \Longleftrightarrow \langle t_1[\mathfrak{m}],\cdots,t_n[\mathfrak{m}]\rangle\in\bar{P}_i^n$$

2) $\mathfrak{A}$の一番外側の記号が$\neg,\wedge,\vee,\supset$のとき

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{B} \Longleftrightarrow \mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ が成り立たない

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C} \Longleftrightarrow \mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ かつ $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{C}$

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C} \Longleftrightarrow \mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ または $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{C}$

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C} \Longleftrightarrow \mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{C}$

3) $\mathfrak{A}$の一番外側の記号が$\forall,\exists$のとき

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\forall x_j\,\mathfrak{F}(x_j) \Longleftrightarrow \mathfrak{m}\stackrel{i}{=}\mathfrak{n}$ をみたす任意の$\mathfrak{n}$に対して $\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_i)$

$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\exists x_j\,\mathfrak{F}(x_j) \Longleftrightarrow \mathfrak{m}\stackrel{i}{=}\mathfrak{n}$ をみたすある$\mathfrak{n}$に対して $\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_i)$

ただし 3) におけるa_iは$\mathfrak{F}(x_j)$に現われない自由変数のうちで最小の番号をもったものとする.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{A}$のとき，$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{M}$において$\mathfrak{m}$によって**みたされる** (satisfiable) という.

例 Lの論理式$\mathfrak{A}$が$P_1^2(f_1^1(a_2),a_3)$であるとしよう. これは素論理式である. Lのフレーム$\mathfrak{M}$の領域Mとして実数の集合をとり，$P_1^2(*_1,*_2)$を$*_1=*_2$, $f_1^1(*)$をexp$(*)$と解釈すれば，$\mathfrak{M}$の任意の点列$\mathfrak{m}=(m_0,m_1,m_2,\cdots)$に対して，$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{M}$において$\mathfrak{m}$によってみたされるとは$\exp m_2=m_3$が成り立つときをいう. 定義6の 1) ではこのことを$a=b$をみたす順序対$\langle a,b\rangle$の集合$\bar{P}_1^2$を用いて，$\langle\exp m_2,m_3\rangle\in\bar{P}_1^2$と表わしてある.

注 Lの論理式$\mathfrak{A}$が，$\forall x_3 P^5(a_0,\ a_1,\ x_3,\ a_6,\ a_7)$であるとし，$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{M}$の任意の点列$\mathfrak{m}=(m_0,m_1,m_2,\cdots)$によってみたされるとは，直観的にいえば，$\mathfrak{M}$の領域$M$のすべて

の元 v について，$P^5(m_0, m_1, v, m_6, m_7)$ が成り立つということであるから，$P^5(a_0, a_1, x_3, a_6, a_7)$ に現われない最小番号の自由変数 a_2 をえらび，$\mathfrak{m}$ と m_2 以外はすべて同じであるようなどんな可算列 $\mathfrak{n}$ に対しても $P^5(a_0, a_1, a_2, a_6, a_7)$ が成り立てばよい．すなわち $\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models P^5(a_0, a_1, a_2, a_6, a_7)$ が成り立てばよいことになり，定義6の 3）の妥当であることがわかる．

定理 3 L の任意の論理式 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ について

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A} \quad \text{または} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\mathfrak{A}$$

の一方だけが成り立つ．

証明 定義6の 2）より明らか． *qed*

定理 4

1） 1.1 節の B 項における (1.1)～(1.6)，(1.8) および (1.14)～(1.18) に対し，これらの論理式に現われる命題変数を任意の論理式でおきかえれば，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ の形のトートロジーをうるが，このとき，

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$$

2）
$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \exists x\, \mathfrak{F}(x) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\forall x \neg\mathfrak{F}(x)$$
$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\exists x \neg\mathfrak{F}(x)$$

ただし $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{M}$ の任意の点列とする．

注 以下形式的な計算を簡単化するため，「$\mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ をみたす任意の $\mathfrak{n}$ に対して」を Ⓐ$\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$，また，「$\mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ をみたすある $\mathfrak{n}$ に対して」を Ⓔ$\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ で表わす．

証明

1） たとえば (1.14) について行なうが，他も同様である．

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$$
$$\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\mathfrak{A} \quad \text{または} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$$
$$\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A} \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$$

最後の $\Longleftrightarrow$ はよりくわしく述べれば次のとおりである．

$\Rightarrow$ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ と仮定すると $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\mathfrak{A}$ は成り立たないから左辺より $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$ となって右辺をうる．

$\Leftarrow$ 定理 3 より

$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ か $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\mathfrak{A}$ が成り立つから，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ なら仮定より $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$ をうる．

2） $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg\forall x \neg\mathfrak{F}(x)$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$ は成り立たない．

$\Longleftrightarrow$ $[\text{Ⓐ}\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \neg \mathfrak{F}(a_i)]$ は成り立たない．

$\Longleftrightarrow$ $\text{Ⓔ}\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};$ $[\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \neg \mathfrak{F}(a_i)$ は成り立たない$]$

$\Longleftrightarrow$ $\text{Ⓔ}\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \neg\neg \mathfrak{F}(a_i)$

$\Longleftrightarrow$ $\text{Ⓔ}\mathfrak{n}, \mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{F}(a_i)$　　（∵定理4　1）の（1.8）の証明）

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \exists x \mathfrak{F}(x)$　　*qed*

C．モ デ ル

a．モデル

定理 5　Lの項tに現われる自由変数はたかだか$a_{j_1}, \cdots, a_{j_k}$とし，また$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$が$\mathfrak{M}$の点列で，$m_{j_1}=n_{j_1}, \cdots, m_{jl}=n_{jl}$が成り立つならば，$t[\mathfrak{m}]=t[\mathfrak{n}]$

証明　関数記号の個数に関する帰納法で証明する．

1.　tが自由変数のとき，$a_{j_i}[\mathfrak{m}]=m_{j_i}=n_{j_i}=a_{j_i}[\mathfrak{n}]$

2.　tが対象定数のとき，$c_i[\mathfrak{m}]=\bar{c}_i=c_i[\mathfrak{n}]$

3.　tが$f^k(t_1, \cdots, t_k)$のとき，

$$\begin{aligned} f^k(t_1, \cdots, t_k)[\mathfrak{m}] &= \bar{f}^k(t_1[\mathfrak{m}], \cdots, t_k[\mathfrak{m}]) \\ &= \bar{f}^k(t_1[\mathfrak{n}], \cdots, t_k[\mathfrak{n}]) \\ &= f^k(t_1, \cdots, t_k)[\mathfrak{n}] \end{aligned}$$

qed

定理 6　Lの論理式$\mathfrak{A}$に現われる自由変数を$a_{j_1}, \cdots, a_{j_l}$とし，また$\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$を$\mathfrak{M}$の点列で，$m_{j_1}=n_{j_1}, \cdots, m_{j_l}=n_{j_l}$が成り立つとすれば

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{A}$$

証明　$\mathfrak{A}$に含まれる論理記号の数に関する帰納法で証明する．

1.　$\mathfrak{A}$が素論理式のとき

$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models P^k(t_1, \cdots, t_k)$

$\Longleftrightarrow$ $\langle t_1[\mathfrak{m}], \cdots, t_k[\mathfrak{m}] \rangle \in \bar{P}^k$　　［定義6の1)］

$\Longleftrightarrow$ $\langle t_1[\mathfrak{n}], \cdots, t_k[\mathfrak{n}] \rangle \in \bar{P}^k$　　［∵　定理5より］

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models P^k(t_1, \cdots, t_k)$

2.　$\mathfrak{A}$の一番外側の記号が，$\neg, \wedge, \vee, \supset$ のとき

$\wedge$のとき

$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$　かつ　$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{C}$

$\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{B}$　かつ　$\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{C}$　　　［帰納法の仮定より］

$\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$

$\neg, \vee, \supset$ についても同様にできる．

3.　$\mathfrak{A}$ の一番外側の記号が $\forall, \exists$ のとき

定義6の 3）より

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x) \Longleftrightarrow \textcircled{$\forall$}\mathfrak{m}', \mathfrak{m}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{F}(a_i)$$

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x) \Longleftrightarrow \textcircled{$\forall$}\mathfrak{n}', \mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{F}(a_i)$$

であるから

$$\textcircled{$\forall$}\mathfrak{m}', \mathfrak{m}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{F}(a_i)$$

$$\Longleftrightarrow \textcircled{$\forall$}\mathfrak{n}', \mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{F}(a_i) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を証明すればよい．

$\Rightarrow$ を証明する　すなわち（$*$）の左辺を仮定し，また $\mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ をみたす任意の $\mathfrak{n}'$ について，$\mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{F}(a_i)$ を示せばよい．

さて $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ および $\mathfrak{m}'$ を次のようにえらぶ（$p=1, 2, \cdots, l$）

$$\begin{array}{llcccccc}
1. & \mathfrak{m}' = (\cdots\cdots, & m_{j_p}', & \cdots\cdots\cdots\cdots, & m_j', & \cdots, & m_i', & \cdots) \\
 & & \| & & \| & & \diagdown\!\!\diagdown\ n_k' & \\
2. & \mathfrak{m} = (\cdots\cdots, & m_{j_p}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & m_j, & \cdots, & m_i, & \cdots) \\
 & & \| & & & & & \\
3. & \mathfrak{n} = (\cdots\cdots, & n_{j_p}, & \cdots\cdots\cdots\cdots, & n_j, & \cdots, & n_i, & \cdots) \\
 & & \| & & \| & & & \\
4. & \mathfrak{n}' = (\cdots\cdots, & n_{j_p}', & \cdots\cdots\cdots\cdots, & n_j', & \cdots, & n_i', & \cdots)
\end{array}$$

すなわち，まずはじめに $\mathfrak{n}$ が3によって与えられておるとすると，$\mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$ をみたすような任意の $\mathfrak{n}'$ は4によって与えることができる．さて $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{m}$ について $m_{j_1}=n_{j_1}, \cdots, m_{j_l}=n_{j_l}$ が成り立つので，$\mathfrak{m}$ は2の形になる．そこで $\mathfrak{m}'$ を $m_i'=n_i'$ が成り立つように，1の形で定義する．明らかに次の i），ii）が成り立つ．

i）$\mathfrak{m} \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{m}'$ であり，（$*$）の左辺が成り立つという仮定から，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{F}(a_i)$ が成り立つ．

ii）$\mathfrak{m}'$ のきめ方から，$\mathfrak{m}'$ と $\mathfrak{n}'$ は $m_{j_1}'=n_{j_1}', \cdots, m_{j_l}'=n_{j_l}'$ および $m_i'=n_i'$ が成り立つ．

ところで $\mathfrak{F}(a_i)$ はもとの $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ より論理記号の数が1減っているから，帰納法の仮定が使える．ただし $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ に比べて，$\mathfrak{F}(a_i)$ は自由変数 a_i が1つ増加しているから，帰納法の仮定は次のようになる．

$m_{j_1}'=n_{j_1}', \cdots, m_{j_k}'=n_{j_k}'$ および $m_i'=n_i'$ のときに限り

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{F}(a_i) \iff \mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{F}(a_i)$$

ii）よりこの仮定の条件がみたされ， i）より左辺が成り立っているから $\mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{F}(a_i)$ が成り立つ．

$\Leftarrow$ の証明は，$\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$; m, n を入れかえれば同様にできる．

$\exists x\, \mathfrak{F}(x)$ についても同じようにできる．　*qed*

定理 7　任意の閉論理式 $\mathfrak{A}$ および任意の点列 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ に対し，

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A} \iff \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{A}$$

証明　定理6で $\mathfrak{A}$ が自由変数を含まない特別の場合になっている．　*qed*

定理7より，L の任意の閉論理式 $\mathfrak{A}$ については，L のフレーム $\mathfrak{M}$ さえきめれば，$\mathfrak{M}$ の点列 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ は $\mathfrak{m}$ に無関係であるといえる．したがって

定義 7　$\mathfrak{A}$ が閉論理式のとき，$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ とは $\mathfrak{M}$ のある点列 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ が成り立つときをいう．

定理 8　$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A} \iff \mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対し，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$

証明　定理7より明らかである．　*qed*

定義 8　$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ のとき，$\mathfrak{M}$ を閉論理式 $\mathfrak{A}$ の**モデル**（model）という．閉論理式の任意の集合 $\{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k, \cdots\}$ に対し，すべての k について $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}_k$ のとき，$\mathfrak{M}$ を $\{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k, \cdots\}$ の**モデル**という．

b．「恒真」の定義

定義 9　L の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ が**恒真**（valid）であるとは，L の任意のフレーム $\mathfrak{M}$，および $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ が成り立つことである．

定理 9　L の任意の閉論理式 $\mathfrak{A}$ に対して，

$\mathfrak{A}$ が恒真 $\iff$ L の任意のフレーム $\mathfrak{M}$ について，$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$

証明　定理8より明らか．　*qed*

定理 10　たかだか自由変数 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ をもつ L の論理式 $\mathfrak{F}(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$ に対し，$\forall x_{j_1} \cdots \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$ が閉論理式ならば，

$\mathfrak{F}(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ が恒真 $\iff \forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_k}\mathfrak{F}(x_{j_1},\cdots,x_{j_k})$ が恒真

証明 任意の $\mathfrak{M}$ および $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対して,

$$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\forall x_{j_1}\cdots\forall x_{j_k}\mathfrak{F}(x_{j_1},\cdots,x_{j_k})$$

$$\iff \text{Ⓐ}\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1\overset{\hat{i}_1}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{m}_1\models\forall x_{j_2}\cdots\forall x_{j_k}\mathfrak{F}(a_{i_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k})$$

$$\iff \text{Ⓐ}\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1\overset{\hat{i}_1}{=}\mathfrak{m}\{\text{Ⓐ}\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2\overset{\hat{i}_2}{=}\mathfrak{m}_1;\ \mathfrak{M},\mathfrak{m}_2\models\forall x_{j_3}\cdots\forall x_{j_k}\mathfrak{F}(a_{i_1},a_{i_2},x_{j_3},\cdots,x_{j_k})\}$$

$$\iff \text{Ⓐ}\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2\overset{\hat{i}_1\hat{i}_2}{=\!=\!=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{m}_2\models\forall x_{j_3}\cdots\forall x_{j_k}\mathfrak{F}(a_{i_1},a_{i_2},x_{j_3},\cdots,x_{j_k})$$

この変形をつづけると

$$\iff \text{Ⓐ}\mathfrak{m}_k,\mathfrak{m}_k\overset{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_k}{=\!=\!=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{m}_k\models\mathfrak{F}(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$$

をうるが,これは任意の $\mathfrak{M}$ と,$\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対して成り立つ.ところで $\mathfrak{m}_k$ と $\mathfrak{m}$ とは $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 番目以外の元はすべて等しいが,$\mathfrak{m}$ が任意の点列であるから,$\mathfrak{m}_k$ もまた任意の点列である.したがって任意の $\mathfrak{M}$, および $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{n}$ に対し,$\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ すなわち,定義より $\mathfrak{F}(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ は恒真である. *qed*

次に公理 A 4: $\forall x\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(t)$ が恒真であることを示すため,二三の準備をおこなう.

補助定理 T を項とするとき,$\mathfrak{n}\overset{\hat{j}}{=}\mathfrak{m}$, $n_j=t[\mathfrak{m}]$ ならば

$$T(a_j)[\mathfrak{n}]=T(t)[\mathfrak{m}]$$

証明

$T(a_j)=a_i\ (i\neq j)$ のとき, $a_i[\mathfrak{n}]=n_i=m_i=a_i[\mathfrak{m}]$

$T(a_j)=a_j$ のとき, $T(a_j)[\mathfrak{n}]=a_j[\mathfrak{n}]=n_j=t[\mathfrak{m}]=T(t)[\mathfrak{m}]$

$T(a_j)=c_i$ のとき, $T(a_j)[\mathfrak{n}]=c_i[\mathfrak{n}]=\bar{c}_i=c_i[\mathfrak{m}]=T(t)[\mathfrak{m}]$

$T(a_j)=f^n(t_1(a_j),\cdots,t_n(a_j))$ のとき,

$$\begin{aligned}
&T(a_j)[\mathfrak{n}]\\
&=f^n(t_1(a_j),\cdots,t_n(a_j))[\mathfrak{n}]\\
&=\bar{f}^n(t_1(a_j)[\mathfrak{n}],\cdots,t_n(a_j)[\mathfrak{n}])\\
&=\bar{f}^n(t_1(t)[\mathfrak{m}],\cdots,t_n(t)[\mathfrak{m}])\\
&=f^n(t_1(t),\cdots,t_n(t))[\mathfrak{m}]\\
&=T(t)[\mathfrak{m}]
\end{aligned}$$

qed

定理 11 $\mathfrak{n} \overset{\hat{j}}{=} \mathfrak{m}$, $n_j = t[\mathfrak{m}]$ ならば

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{F}(a_j) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{F}(t)$$

証明 $\mathfrak{F}(a_j)$ に含まれる論理記号の数 l についての帰納法による．

$l=0$ のとき，$\mathfrak{F}(a_j)$ は素論理式であるから $\mathfrak{F}(a_j) = P^n(t_1(a_j), \cdots, t_n(a_j))$ と書ける．このとき

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models P^n(t_1(a_j), \cdots, t_n(a_j)) \\ \Longleftrightarrow\ & \langle t_1(a_j)[\mathfrak{n}], \cdots, t_n(a_j)[\mathfrak{n}] \rangle \in \bar{P}^n \\ \Longleftrightarrow\ & \langle t_1(t)[\mathfrak{m}], \cdots, t_n(t)[\mathfrak{m}] \rangle \in \bar{P}^n \quad (\because\ \text{補助定理による}) \\ \Longleftrightarrow\ & \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models P^n(t_1(t), \cdots, t_n(t)) \end{aligned}$$

$l>0$ のとき，$\mathfrak{F}(a_j)$ の一番外側の記号が$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$のときは，定義６と帰納法の仮定より明らかであるから，一番外側の記号が$\forall$のときについてだけ行なう．いま

$$\mathfrak{F}(a_j) = \forall x\, \mathfrak{G}(a_j, x)$$

とし，$\mathfrak{G}(a_j, x)$ および t に含まれない自由変数 a_i をとれば

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \forall x\, \mathfrak{G}(a_j, x) \\ \Longleftrightarrow\ & \text{Ⓐ}\ \mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{G}(a_j, a_i) \end{aligned} \qquad (1)$$

また

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{G}(t, x) \\ \Longleftrightarrow\ & \text{Ⓐ}\ \mathfrak{m}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{G}(t, a_i) \end{aligned} \qquad (2)$$

であるから，（１）と（２）の同値を証明すればよい．

（１）⇒（２）を証明しよう．

Ⓐ $\mathfrak{m}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{m}$ に対し，$\mathfrak{n}' \overset{\hat{i}}{=} \mathfrak{n}$, $n_i' = m_i'$ をみたすような $\mathfrak{n}'$ をえらぶ．すなわち，

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{m}' = (\cdots\cdots, & m_k', & \cdots\cdots, m_j', & \cdots\cdots, m_i', & \cdots\cdots) \\ & \| & \quad\ \| & & \\ \mathfrak{m}\ = (\cdots\cdots, & m_k, & \cdots\cdots, m_j, & \cdots\cdots, m_i, & \cdots\cdots) \\ & \| & & \quad\ \| & \\ \mathfrak{n}\ = (\cdots\cdots, & n_k, & \cdots\cdots, t[\mathfrak{m}], & \cdots\cdots, n_i, & \cdots\cdots) \\ & \| & \quad\ \| & & \\ \mathfrak{n}' = (\cdots\cdots, & n_k', & \cdots\cdots, t[\mathfrak{m}], & \cdots\cdots, n_i', & \cdots\cdots) \\ & & & \qquad\ \| & \\ & & & \qquad m_i' & \end{array}$$

である．このとき

$$\mathfrak{n}' \overset{\hat{j}}{=} \mathfrak{m}', \quad n_j' = n_j = t[\mathfrak{m}] = t[\mathfrak{m}']$$

が成り立つ．したがって帰納法の仮定より

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{n}' \models \mathfrak{G}(a_j, a_i) \iff \mathfrak{M},\ \mathfrak{m}' \models \mathfrak{G}(t, a_i)$$

が成り立つ．仮定より（1）が成り立つから，$\mathfrak{M}, \mathfrak{n}' \models \mathfrak{G}(a_j, a_i)$．したがって，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}' \models \mathfrak{G}(t, a_i)$ が成り立つ．

（2）⇒（1）も同じようにして証明される． *qed*

定理 12 $\forall x\, \mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{F}(t)$ は恒真である．

証明

$\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{F}(t)$ が成り立てばよいから，

$\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x) \Rightarrow \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{F}(t)$ を示せば十分である．

$\mathfrak{F}(x)$ の中にある自由変数をたかだか $a_{j_1}, \cdots, a_{j_k}$ とし，$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{A}(x, a_{j_1}, \cdots, a_{j_k})$ とおく．$j_1, \cdots, j_k$ と異なる最小の自然数を j とし，

$\mathfrak{n} \overset{\hat{j}}{=} \mathfrak{m}$ および $n_j = t[\mathfrak{m}]$ が成り立つように $\mathfrak{n}$ をえらぶと，$n_{j_i} = a_{j_i}[\mathfrak{m}]$ であり，定理 11 より

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \mathfrak{A}(a_j, a_{j_1}, \cdots, a_{j_k}) \iff \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}(t, a_{j_1}, \cdots, a_{j_k})$$

が成り立つ．

さて，すべての $\mathfrak{M}$，および $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対し，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \forall x\, \mathfrak{F}(x)$ と仮定すれば，$\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{n}, \mathfrak{n} \overset{\hat{j}}{=} \mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{n} \models \mathfrak{A}(a_j,\ a_{j_1}, \cdots, a_{j_k})$ となり，したがって，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}(t, a_{j_1}, \cdots, a_{j_k})$ すなわち $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{F}(t)$ が成り立つ． *qed*

定理 13 $\mathfrak{A}$ を Hq の論理式とするとき，Hq において

$$\mathfrak{A}\ \text{が証明可能} \Rightarrow \mathfrak{A}\ \text{は恒真}$$

証明 Hq として定理１の体系をとる．公理 A 1〜A 4 が恒真であること，および推論規則が恒真という性質をたもつことを示せばよい．

1. $\mathfrak{A}$ が A 1〜A 3 のとき，たとえば A 1 では $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$ の形であり，これの恒真は，定理４より $\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{m} \models \mathfrak{B} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$．したがって，定理 4. 1）より $\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models (\mathfrak{B} \vee \neg \mathfrak{B}) \vee \neg \mathfrak{C}$ を示せばよいが，定義６を用いれば

$\forall\!\!\!\bigcirc\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{B}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg \mathfrak{B}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg \mathfrak{C}$ を示せばよい．しかしこれは定理３より明らかに成り立ち，A 1 は恒真である

2. A 4：$\forall x\, \mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{F}(t)$ の恒真は定理 12 で証明されている．

3. 推論規則

R 1　$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ の恒真を仮定し，$\mathfrak{B}$ の恒真を示せばよい．すなわち，すべての $\mathfrak{M}$ および $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ が仮定されている．もし，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ とすれば $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{A}$ と矛盾する（定理3）から，したがって ⓐ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{B}$ である．∴ $\mathfrak{B}$ は恒真．

R 2　$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(a_j)\vdash\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)$（ただし a_j は $\mathfrak{F}(x)$ にも $\mathfrak{A}$ にも現われない自由変数とする）は $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{F}(a_j)\vdash\neg\mathfrak{A}\vee\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ と書き直せるが，この仮定 $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{F}(a_j)$ が恒真であるとは，ⓐ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{F}(a_j)$．したがって ⓐ $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}$; $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\mathfrak{F}(a_j)$．また結論 $\neg\mathfrak{A}\vee\forall x\mathfrak{F}(x)$ が恒真であるとは同様にして

$$ⓐ\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}\quad \text{または}\quad \mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\forall x\,\mathfrak{F}(x)$$

ということである．いま，すべての $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ に対し，(1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ が成り立つと仮定すれば，$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が成り立つ．また（2）$\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ が成り立たない場合，一般に $\mathfrak{M}, \mathfrak{n}\models\neg\mathfrak{A}$ でないと仮定すれば，$\mathfrak{M}, \mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_j)$ が成り立つ．このことは任意の $\mathfrak{n}$ について成り立つが，とくに $\mathfrak{n}\overset{\hat{j}}{=}\mathfrak{m}$ なる任意の $\mathfrak{n}$ のときは，a_j が $\mathfrak{A}$ に含まれないことより，$\mathfrak{M}, \mathfrak{n}\models\neg\mathfrak{A}$ は成り立たない．したがって，$\mathfrak{M}, \mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_j)$ すなわち，

$$ⓐ\ \mathfrak{n}, \mathfrak{n}\overset{\hat{j}}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M}, \mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_j)$$

となり，これは定義より $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ であり，この場合も $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\neg\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{M}, \mathfrak{m}\models\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が成り立つことになる．したがって結論は恒真である．

qed

定理 14　*Hq* は無矛盾である．

証明　*Hq* が矛盾と仮定すれば，ある論理式 $\mathfrak{A}$ に対し $\vdash_{H_q}\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}$．ゆえに定理 13 より $\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}$ は恒真である．ところで定理 10 より $\mathfrak{A}$ は閉論理式と考えて一般性を失なわない．閉論理式 $\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}$ が恒真であるとは定理9より任意のフレーム $\mathfrak{M}$ について $\mathfrak{M}\models\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}$ であるが，しかしどんなフレーム $\mathfrak{M}$ に対しても $\mathfrak{M}\models\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}$ は成り立たない（∵ $\mathfrak{M}\models\mathfrak{A}$ が成り立ち，かつ $\mathfrak{M}\models\mathfrak{A}$ が成り立たないことを主張しているから）．これは不合理である．*qed*

2・2 完全性定理

定理 13 の逆を述べることにより，証明可能な論理式の全体と，恒真な論理式の全体とが集合として一致することを明らかにしよう．

A．完全性定理

ここでは Henkin の定理（定理 16）を仮定して，Gödel の完全性定理を証明する．定理 16 の証明は次の B において行なう．

定義 10 言語 L の閉論理式の任意の集合（これを公理系という）を Γ_0 とする．集合 Γ_0 の濃度は任意とする．

Γ_0 が**無矛盾** (consistent) であるとは，Γ_0 の任意の有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ および，任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対し，$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B}$ が成り立たないときをいう．

定理 15 Γ_0 が無矛盾

$\Longleftrightarrow$ Γ_0 の任意の有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ に対し，$\neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k)$ が証明可能でない．

証明 Γ_0 の任意の有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ および任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対し，以下のおのおのが同等であることが示される．

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B}$$

$$\Longleftrightarrow \mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B}$$

［∵ $\vdash \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}))$, $\vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, $\vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}$ よりそれぞれ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B}$ がえられ，これらを用いると任意の論理式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ に対し $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ が成り立つ．］

$$\Longleftrightarrow \vdash (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k) \supset (\mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B})$$

$$\Longleftrightarrow \vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k) \vee (\mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B})$$

$$\Longleftrightarrow \vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k) \qquad [\because \ \vdash (\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B})) \supset \mathfrak{A}]$$

したがって

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B} \Longleftrightarrow \vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k)$$

ゆえに，Γ_0 が無矛盾すなわち「Γ_0 の任意の閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ と任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対して，$\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B} \wedge \neg\mathfrak{B}$ が成り立たない」と「任意の閉論理

式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ に対して $\vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k)$ が成り立たない」とは同等である.

qed

さて Henkin の定理を仮定して，定理 13 の逆（定理 18）が導かれることを示そう．Henkin の定理とは次のものである．

定理 16 (Henkin の定理) Γ_0 を任意の閉論理式のある集合で，濃度は任意であるとき，Γ_0 が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ Γ_0 のモデルが存在する.

さて準備として前に述べた定理 10 と類似の性質を一つ述べておこう.

定理 17 たかだか k 個の自由変数 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ をもつ論理式を $\mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ とすれば

$$\vdash \mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) \Longleftrightarrow \vdash \forall x_{j_1}, \cdots, \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$$

証明 $\Rightarrow$ H_q では任意の論理式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ に対し $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ が成り立つ，したがって，a を $\mathfrak{F}(x)$ に現われない自由変数とすれば推論規則 R 2 により $\mathfrak{F}(a) \vdash \forall x \mathfrak{F}(x)$ は明らかに成り立つ．したがって

$$\mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) \vdash \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}}, x_{j_k}) \quad \text{すなわち}$$

$$\vdash \mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) \Rightarrow \vdash \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}}, x_{j_k})$$

この操作を k 回繰り返せば

$$\vdash \mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) \Rightarrow \vdash \forall x_{j_1} \cdots \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$$

をうる.

$\Leftarrow$ 公理 A 4 より $\vdash \forall x_{j_1} \cdots \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}) \supset \mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ が導かれるから，MP を用いて左辺をうる． *qed*

定理 10，定理 17 より，$\mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ と $\forall x_{j_1} \cdots \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$ は恒真という性質および証明可能という性質に関して同値となる.

$\forall x_{j_1} \cdots \forall x_{j_k} \mathfrak{F}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$ を $\mathfrak{F}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ の**閉包** (closure) という．任意の論理式の閉包は自由変数を含まないから閉論理式である．したがって，定理 13 の逆を以下で述べるとき，任意の論理式 $\mathfrak{A}$ を閉論理式の場合に制限しても一般性を失わない.

定理 18 (完全性定理，completeness theorem) $\mathfrak{A}$ を Hq の閉論理式とす

るとき，Hq において $\mathfrak{A}$ が恒真 $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は証明可能.

証明 定理 16 より「$\neg\mathfrak{A}$ のモデルが存在しない $\Rightarrow$ $\neg\mathfrak{A}$ が矛盾」したがって，定理 15 より

$$\forall \mathfrak{M};\ (\mathfrak{M} \models \neg\mathfrak{A} \text{ が成り立たない}) \Rightarrow \vdash \neg\neg\mathfrak{A}$$

すなわち

$$\forall \mathfrak{M};\ (\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}) \text{ ならば } \vdash \mathfrak{A}$$ *qed*

一般に $\mathfrak{A}$ を形式的体系 S の任意の論理式とするとき，S において

$$\mathfrak{A} \text{ が恒真} \Rightarrow \mathfrak{A} \text{ が証明可能}$$

であるとき，S は完全（complete）であるという．Hq が完全であることを述べた定理 18 を **Gödel の完全性定理**という．定理 13 と定理 18 より

定理 19 Hq の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A}$ が恒真 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ が証明可能.

B. Henkin の定理

ここで Henkin の定理の証明を行なう．まず前半の

$$\Gamma_0 \text{ が無矛盾} \Rightarrow \Gamma_0 \text{ のモデルが存在する}$$

を証明するのに，補助定理をいくつか述べよう．

a．補助定理 Γ_0 を言語 L_0 の閉論理式の集合とする．L_0 の閉論理式のうち $\exists x\mathfrak{F}(x)$ の形のものをすべて並べ（ただし整列可能定理を仮定して）

$$\exists x\mathfrak{F}_0(x),\ \exists x\mathfrak{F}_1(x), \cdots, \exists x\mathfrak{F}_\alpha(x), \cdots$$

とする．各 $\exists x\mathfrak{F}_\alpha(x)$ に対し，L_0 に含まれない新しい記号 w_α を対応させ，w_α を新しい対象定数として L_0 に付け加えた言語を L_1 とする．すなわち $L_1 = L_0 \cup \{w_0, w_1, \cdots, w_\alpha, \cdots\}$ かつ $L_0 \subset L_1$ である．

$\exists x\mathfrak{F}_\alpha(x) \supset \mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)$ なる L_1 の閉論理式を簡単に $\mathfrak{A}_\alpha$ とおく．Γ_0 に $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots$を付け加えてできる集合を Γ_1 とする．すなわち $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\alpha, \cdots\}$ かつ $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ である，さて Γ_0 を無矛盾とするとき，次の補助定理 1～4 が成り立つ．

補助定理 1 Γ_1 は無矛盾である．

証明 Γ_1 が矛盾とすると，定義より Γ_0 のある閉論理式 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ および $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$ のある有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_{\alpha_1}, \cdots, \mathfrak{A}_{\alpha_m}$ に対し

$$\vdash \neg(\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_n \wedge \mathfrak{A}_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{\alpha_m})$$

が成り立つ．簡単のため $m=1$ のときについて行なうこととし，さらに

$\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_n$ も簡単に $\mathfrak{B}$ と表わせば

$$\vdash \neg(\mathfrak{B}\wedge(\exists x\,\mathfrak{F}_\alpha(x)\supset\mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)))$$

これは次のように変形できる

$$\vdash (\mathfrak{B}\supset\exists x\,\mathfrak{F}_\alpha(x))\wedge(\mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)\supset\neg\mathfrak{B})$$

$$[\because\ \vdash \neg(\mathfrak{B}\wedge(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))\equiv(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\wedge(\mathfrak{C}\supset\neg\mathfrak{B})\ \text{より}]$$

$\vdash \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$ を用いると，上から次の二式をうる．

$$\vdash \mathfrak{B}\supset\exists x\,\mathfrak{F}_\alpha(x)$$

$$\vdash \mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)\supset\neg\mathfrak{B}$$

第二式で $\mathfrak{B}$ は Γ_0 の論理式 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ からできているから，$\neg\mathfrak{B}$ は w_α を含まない．したがって，$\mathfrak{B}$ にも $\mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)$ にも含まれない自由変数 a をとり，$\mathfrak{F}_\alpha(w_\alpha)\supset\neg\mathfrak{B}$ の証明図の中に現われる w_α をすべて a でおきかえれば，$\mathfrak{F}_\alpha(a)\supset\neg\mathfrak{B}$ の証明図がえられる．したがって R 3 より $\vdash \exists x\,\mathfrak{F}_\alpha(x)\supset\neg\mathfrak{B}$ である．これと第一式 $\vdash\mathfrak{B}\supset\exists x\,\mathfrak{F}_\alpha(x)$ とより $\vdash\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{B}$ すなわち $\vdash\neg\mathfrak{B}$ となる．ところで Γ_0 は無矛盾であるから，どんな $\mathfrak{B}_i$ に対しても $\vdash\neg(\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_n)$ は成り立たないから $\vdash\neg\mathfrak{B}$ に反する．したがって Γ_1 は無矛盾である．

$m\geqq 2$ の場合にも同じようにして証明できる．　*qed*

L_0 および Γ_0 から L_1 をつくり，さらに Γ_1 を定義したのと全く同じ方法で，一般に $L_n,\Gamma_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ を定義することができる．

$$L_0\subset L_1\subset L_2\subset\cdots\subset L_n\subset\cdots$$

$$\Gamma_0\subset\Gamma_1\subset\Gamma_2\subset\cdots\subset\Gamma_n\subset\cdots$$

が成り立つこと，および上に述べた補助定理 1 を拡張した次の形の定理

$$\Gamma_n\ \text{が無矛盾}\ \Rightarrow\ \Gamma_{n+1}\ \text{が無矛盾}$$

が成り立ち，したがって，

すべての自然数 n に対し，Γ_n は無矛盾である

ことが確かめられる．

$L_0\cup L_1\cup\cdots\cup L_n\cup\cdots$ を L_ω で，$\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\cdots\cup\Gamma_n\cup\cdots$ を Γ_ω で表わすと，

補助定理 2　Γ_ω は無矛盾である．

証明　Γ_ω が矛盾であると仮定すれば，Γ_ω のある有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\cdots,\mathfrak{A}_m$ について $\vdash_{H_q}\neg(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m)$ である．ところで各 $\mathfrak{A}_k(k=1,2,\cdots,m)$

について，$\mathfrak{A}_k \in \Gamma_{i_k}$ であるような Γ_{i_k} が存在するから，$\max(i_1, \cdots, i_k, \cdots, i_m) = l$ とすれば，$\Gamma_{i_k} \subset \Gamma_l$ となるから $\mathfrak{A}_k \in \Gamma_l$ が $k=1,2,\cdots,m$ に対して成り立つ．ところが補助定理1より Γ_l は無矛盾であるから $\neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m)$ は Hq において証明可能ではない．これは仮定に反する． qed

定義 11 集合に関する性質 C が**有限性** (finite character) をもつとは，次の関係が成り立つときをいう．

集合 X が性質 C をみたす $\Longleftrightarrow$ 集合 X のすべての有限部分集合が性質 C をみたす． 有限性については，次の補題が成り立つ．

Zorn の補題 集合に関する性質 C が有限性をもつとき，任意の集合は包含関係に関して C をみたす極大な部分集合をもつ．

補助定理 3 Γ_ω を含み，無矛盾でかつ極大な L_ω の閉論理式の集合 $\tilde{\Gamma}_\omega$ が存在する．

証明 集合 X を L_ω の閉論理式の集合とする．

Γ_ω が無矛盾ならば $\Gamma_\omega \cup X$ も無矛盾である（このとき X は Γ_ω と無矛盾であるという）とき，X は性質 C をみたすと定義しよう．この定義にしたがえば，C は有限性をもつことが示される．なぜなら，Γ_ω が無矛盾であるとき，X の任意の有限部分集合を X' として

$$\Gamma_\omega \cup X \text{ が無矛盾} \Longleftrightarrow \Gamma_\omega \cup X' \text{ が無矛盾}$$

を示せばよいが

$\Rightarrow$：$\Gamma_\omega \cup X' \subset \Gamma_\omega \cup X$ より明らか（$\because$ $\Gamma_\omega \cup X'$ が矛盾とすれば，$\Gamma_\omega \cup X'$ のある閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ に対し，$\vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k)$．$X' \subset X$ より $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ は $\Gamma_\omega \cup X$ の閉論理式でもあり，したがって $\Gamma_\omega \cup X$ が矛盾）．

$\Leftarrow$：$\Gamma_\omega \cup X$ が矛盾とすれば，Γ_ω のある部分集合 $\{\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_j\}$ および X のある有限部分集合 $X' = \{\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_k\}$ に対し，$\vdash \neg((\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_j) \wedge (\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_k))$ となる．すなわち X の任意の部分集合 X' に対し，$\Gamma_\omega \cup X'$ が無矛盾であることに反する．ゆえに C は有限性をもつ．

したがって，Zorn の補題より，L_ω の閉論理式全体の中に Γ_ω と無矛盾でかつ極大であるような集合 X が存在する．この X に対してつくられた $\Gamma_\omega \cup X$ は

「Γ_ω を含み，かつ無矛盾な論理式の集合（L_ω における）」

のうち極大のものである．なぜなら

補助定理2より Γ_ω は無矛盾であるから $\Gamma_\omega \cup X$ も無矛盾であり，また $\Gamma_\omega \cup X$ が極大でないと仮定すれば，Xに含まれない任意の閉論理式を $\mathfrak{A}$ とし，$\Gamma_\omega \cup X \cup \{\mathfrak{A}\}$ が無矛盾なら $X \cup \{\mathfrak{A}\}$ が Γ_ω と無矛盾となり，Xが極大であることに反する．ゆえに $\Gamma_\omega \cup X$ は極大である．$\Gamma_\omega \cup X$ を $\tilde{\Gamma}_\omega$ とおけばよい．

qed∥

補助定理 4 $\tilde{\Gamma}_\omega$ のたかだか有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_k$ および任意の閉論理式 $\mathfrak{B}$ について，

1) $\vdash (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k) \supset \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$

2) $\mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$ または $\neg \mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$

3) 「$\mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$ かつ $\neg \mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$」は成り立たない．

証明

1) $\mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$ でないとすると，$\tilde{\Gamma}_\omega$ の極大性より $\tilde{\Gamma}_\omega \cup \{\mathfrak{B}\}$ は矛盾，$\tilde{\Gamma}_\omega$ は無矛盾であるから，$\tilde{\Gamma}_\omega$ のたかだか有限個の閉論理式 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_p$ について，$\vdash \neg (\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_p \wedge \mathfrak{B})$．したがって $\vdash \mathfrak{B} \supset \neg (\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_p)$．また仮定より $\vdash (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k) \supset \mathfrak{B}$ であるから，この二式より $\vdash \neg (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_k \wedge \mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_p)$ をうるが，これは $\tilde{\Gamma}_\omega$ が矛盾であることを示しており，補助定理3に反する．

2) $\mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$ でないとすれば，$\tilde{\Gamma}_\omega$ の極大であることより $\tilde{\Gamma}_\omega \cup \{\mathfrak{B}\}$ は矛盾である．ゆえに $\vdash \neg (\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_p \wedge \mathfrak{B})$．これを変形し $\vdash (\mathfrak{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_p) \supset \neg \mathfrak{B}$．したがって，補助定理4の 1) より，$\neg \mathfrak{B} \in \tilde{\Gamma}_\omega$．

3) $\tilde{\Gamma}_\omega$ が無矛盾であることより明らかである． qed∥

最後に Γ_0 のモデル $\mathfrak{M} = [M;\ \bar{c}_0, \bar{c}_1, \cdots;\ \bar{f}_0, \bar{f}_1, \cdots;\ \bar{P}_0, \bar{P}_1, \cdots]$ を次のように定義する．

M : L_ω の閉項 $t_1, t_2, \cdots$ の全体の集合，

$\bar{c}_i\ (i=0,1,2,\cdots)$: L の対象定数を $c_0, c_1, \cdots$ としたとき，$\bar{c}_i = c_i$ と定める．c_i は L_ω の閉項であるから $\bar{c}_i \in M$ である．

$\bar{f}_i$: L の k 変数の関数記号 f_i^k に対し，$\bar{f}_i^k$ を次のように定める．

1. $\bar{f}_i^k$ は M^k から M への一意写像
2. 任意の M の元 $t_1, t_2, \cdots$ について，$\bar{f}_i^k(t_1, \cdots, t_k) \equiv f_i^k(t_1, \cdots, t_k)$．ただし $f_i^k(t_1, \cdots, t_k)$ は L_ω の閉項であるから，$\bar{f}_i^k(t_1, \cdots, t_k) \in M$ である．

$\bar{P}_i$: L の k 変数の述語記号 P_i^k に対し, $\bar{P}_i^k$ を次のように定める.

1. $\bar{P}_i^k \subseteq M^k$ すなわち $\bar{P}_i^k$ は M の元からできる k 項系列 $\langle t_1, \cdots, t_k \rangle$ のある集合を表わしている.

2. 任意の M の元 $t_1, t_2, \cdots$ について

$$\langle t_1, \cdots, t_k \rangle \in \bar{P}_i^k \iff P_i^k(t_1, \cdots, t_k) \in \tilde{\Gamma}_\omega$$

b. Henkin の定理の証明　以上の準備のもとに, 定理 16 (Henkin) の証明をおこなう. 補助定理 1, 2 および 3 においては, 無矛盾な閉論理式の集合 Γ_0 に, これと矛盾しないように, しかも後で必要となる閉論理式を順次に加えて Γ_0 を拡大し, 閉論理式だけからなる十分大きい集合 $\tilde{\Gamma}_\omega$ を定義し, 補助定理 4 において $\tilde{\Gamma}_\omega$ の本質的な性質を述べた. またこれにつづいて, モデル $\mathfrak{M}$ を定義した. さて次に述べる補助定理 5 が証明できれば, これは $\mathfrak{M}$ が $\tilde{\Gamma}_\omega$ のモデルであることを示しているから, したがって $\mathfrak{M}$ はまた Γ_0 のモデルでもあり, 定理 16 の前半が証明される.

補助定理 5　L_ω の任意の閉論理式 $\mathfrak{A}$ に対し,

$$\mathfrak{A} \in \tilde{\Gamma}_\omega \iff \mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$$

証明　$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ とは定理 8 より, $\mathfrak{M}$ の任意の点列 $\mathfrak{m}$ に対し, $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{A}$ である. 証明は $\mathfrak{A}$ の論理記号の個数 l についての帰納法による.

1. $l=0$ のとき, $\mathfrak{A} \equiv P^n(t_1, \cdots, t_n)$ とする. ただし P^n は n 変数の述語記号, t_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ は L_ω の閉項を表わす. このとき

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models P^n(t_1, \cdots, t_n) \\
\iff &\langle t_1[\mathfrak{m}], \cdots, t_n[\mathfrak{m}] \rangle \in \bar{P}^n \\
\iff &\langle t_1, \cdots, t_n \rangle \in \bar{P}^n \\
\iff &P^n(t_1, \cdots, t_n) \in \tilde{\Gamma}_\omega \qquad [\because\ \bar{P}^n \text{ の定義より}]
\end{aligned}$$

2. $l>0$ のとき, $\mathfrak{A}$ の一番外側の記号について分ける.

2.1　$\mathfrak{A} = \neg \mathfrak{F}$ とする. ただし $\mathfrak{F}$ は閉論理式である. このとき

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \neg \mathfrak{F} \\
\iff &\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models \mathfrak{F} \text{ は成り立たない.} \\
\iff &\mathfrak{F} \in \tilde{\Gamma}_\omega \text{ は成り立たない} \qquad [\because\ \text{帰納法の仮定より}] \\
\iff &\neg \mathfrak{F} \in \tilde{\Gamma}_\omega
\end{aligned}$$

[$\because$ $\Rightarrow$ は補助定理 4 の 2) より, $\Leftarrow$ は補助定理 4 の 3) より]

2.2 $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}$ とする．このとき

$$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{F}$ かつ $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{G}$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{F}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ かつ $\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ ［∵ 帰納法の仮定より］

$\Longleftrightarrow$ $\tilde{\Gamma}_\omega$ のたかだか有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_k$ および $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_j$ が存在して $\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k)\supset\mathfrak{F}$ かつ $\vdash(\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j)\supset\mathfrak{G}$

［∵ $\Rightarrow$ は明らか，$\Leftarrow$ は補助定理 4 の 1）より］

$\Longleftrightarrow$ $\tilde{\Gamma}_\omega$ のたかだか有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_j$ について $\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k\wedge\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j)\supset(\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G})$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ ［∵ 補助定理 4 の 1）より］

2.3 $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}\vee\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}\supset\mathfrak{G}$ のときも同様である．

2.4 $\mathfrak{A}=\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ とする．$\mathfrak{F}(x)$ は閉論理式である．このとき

$$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\exists x\,\mathfrak{F}(x)$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\mathfrak{n},\mathfrak{n}\overset{\hat{0}}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_0)$ であるから

$$(\exists\mathfrak{n},\mathfrak{n}\overset{0}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_0))\Longleftrightarrow\exists x\mathfrak{F}(x)\in\tilde{\Gamma}_\omega$$

を証明する．

$\Rightarrow$：与えられた $\mathfrak{m}=(m_0,m_1,m_2,\cdots)$ に対し，$\mathfrak{n}=(w_0,m_1,m_2,\cdots)$ とえらぶことにすれば，$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_0)$ は $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(w_0)$ となることが証明され，これはさらに，$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}\models\mathfrak{F}(w_0)$ と同値となるから

$$\exists\,\mathfrak{n},\mathfrak{n}\overset{\hat{0}}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{m}\models\mathfrak{F}(w_0)$$

が成り立つ．したがって帰納法の仮定より，$\mathfrak{F}(w_0)\in\tilde{\Gamma}_\omega$，ゆえに $\tilde{\Gamma}_\omega$ のたかだか有限個の閉論理式 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_k$ が存在して $\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k)\supset\mathfrak{F}(w_0)$ が成り立つ．これより，$\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k)\supset\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ が成り立つから，補助定理 4 の 1）より $\exists x\,\mathfrak{F}(x)\in\tilde{\Gamma}_\omega$ をうる．

$\Leftarrow$：$\exists x\,\mathfrak{F}(x)\in\tilde{\Gamma}_\omega$ と仮定すると，$\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ はある言語 L_k の閉論理式であるから，この論理式に対し，L_{k+1} の新しい記号 w_0 が対応し，$\exists x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(w_0)$ は $\tilde{\Gamma}_\omega$ の閉論理式である．しかも $\vdash(\exists x\,\mathfrak{F}(x)\wedge(\exists x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(w_0))\supset\mathfrak{F}(w_0)$ が成り立つから補助定理 4 の 1）より $\mathfrak{F}(w_0)\in\tilde{\Gamma}_\omega$，ゆえに帰納法の仮定より $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\mathfrak{F}(w_0)$，これより $\exists\,\mathfrak{n},\mathfrak{n}\overset{\hat{0}}{=}\mathfrak{m};\ \mathfrak{M},\mathfrak{n}\models\mathfrak{F}(a_0)$ をうる．

2.5 $\mathfrak{A}=\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ のときも同様である．以上で定理16の前半は証明された．

後半は

$$\Gamma_0 \text{ のモデルが存在する．} \Rightarrow \Gamma_0 \text{ が無矛盾}$$

を示せばよい．

もし Γ_0 が矛盾であると仮定すれば，Γ_0 のたかだか有限個の論理式 $\mathfrak{A}_1, \cdots,$ $\mathfrak{A}_m$ に対して，$\vdash \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m)$ が成り立つ．定理13より $\neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m)$ は恒真であるから，L の任意のフレーム $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{M} \models \mathfrak{A}_m$ がすべて同時に成り立つことはない．すなわち Γ_0 のモデルは存在しないことになり仮定に反する． *qed*

最後に完全性とモデルの関係について一つの定理を述べておこう．

定理 20 Hq が完全 $\Longleftrightarrow$ 任意の無矛盾な閉論理式についてモデルが存在する．

証明 $\Rightarrow$：$\mathfrak{B}$ を無矛盾な閉論理式とすれば，$\vdash_{Hq} \neg\mathfrak{B}$ は成り立たない．Hq は完全であるから，$\neg\mathfrak{B}$ は恒真ではない．したがってあるフレームが存在して $\mathfrak{M} \models \neg\mathfrak{B}$ は成り立たない．ゆえに $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$ が成り立ち，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{B}$ のモデルである．

$\Leftarrow$：左辺を否定する．すなわち，$\mathfrak{B}$ を恒真な閉論理式とし，かつ $\vdash \mathfrak{B}$ でないと仮定しよう．$\vdash \mathfrak{B}$ が成り立たないことより，$\neg\mathfrak{B}$ は無矛盾，したがって，右辺の仮定より $\neg\mathfrak{B}$ のモデル $\mathfrak{M}$ が存在する．すなわち $\mathfrak{M} \models \neg\mathfrak{B}$．このことより $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$ は成り立たない．

一方，$\mathfrak{B}$ が恒真であることから，上に用いた $\mathfrak{M}$ について $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$ となり矛盾である． *qed*

第3章　直観主義論理

第3章では Gentzen により導入された自然推論とよばれる方法を紹介する．まず，3·1 節では直観主義の論理について述べる．この論理は第1，2章で扱った古典論理とは異質のものであるが，形式的には古典論理と同じ方法で扱うことができる．3·2 節では直観主義論理を解説するための好都合な体系として，自然推論を用いた体系 NJ を定義し，また NJ と関連のある二，三の体系とくに古典論理体系 NK にふれる．自然推論では NK に比べ NJ は誠に自然な体系として表現されている．3·3 節では NJ と NK との関係についての Glivenko の定理を紹介する．3·4 節では第4，5章でおこなう無矛盾証明の準備として有限の立場についての簡単な解説と，この立場からの自然数および超限順序数にふれる．超限順序数は第5章で必要となる．

3·1　直観主義論理

A．数学の立場

数学は長い間最も確かな学問とみなされてきた．数学の理論が矛盾を含んでいるということはありえないことのように思われていた．しかし Cantor によってはじめられた集合論の中でいろいろの矛盾――パラドックスとよばれるもの――が現われ始めた．代表的な一つの例をあげよう．

いますべての集合の全体を考える．これを $\mathfrak{N}$ とすると $\mathfrak{N}$ はまた集合であるから $\mathfrak{N}\in\mathfrak{N}$ が成り立つ．このように自分自身を元として含むような集合を第一種の集合という．普通の集合，たとえば自然数の集合などでは，その集合の中にその集合自身が元として含まれるということはない．自分自身を元として含まないような集合を第二種の集合という．

さて第二種の集合の全体は一つの集合をつくる．これを $\mathfrak{M}$ とすれば $\mathfrak{M}=\{s;\ s\bar{\in} s\}$ である．$\mathfrak{M}$ は第一種であろうかそれとも第二種であろうか？　いま $\mathfrak{M}$ を第一種の集合と仮定すると，定義より $\mathfrak{M}\in\mathfrak{M}$ である．しかし一方 $\mathfrak{M}$ は第二種の集合しか元として含んでいないのであるから $\mathfrak{M}\bar{\in}\mathfrak{M}$ となり定義と矛盾する．次に $\mathfrak{M}$ を第二種の集合と仮定すると定義より $\mathfrak{M}\bar{\in}\mathfrak{M}$．ところで一方

$\mathfrak{M}$は第二種の集合を全部含んでいるから $\mathfrak{M}\in\mathfrak{M}$ となり，また定義と矛盾する．これを **Russell のパラドックス** (paradox) という．

パラドックスのおこる理由についてはいろいろ考えることができる．「ある対象の集合」というあいまいな概念に起因するとも考えられるが，実は集合の元として，1) 任意の自然数 1，2，3，など，2) 元として許されたものから作られた任意の集合，たとえばすべての自然数の集合，の二つに制限しても同じようなパラドックスの生ずることがわかるのである．したがって対象としてとり扱う自然数の領域に矛盾を含んでいるのか，あるいは用いられている推理の仕方に問題があるのかを明らかにしなければならない．また一方次のように考えることもできる．すなわち，ある定まった集合の全体が与えられたとき，これを第一種の集合と第二種の集合に分けるのはさしつかえないが，第二種の集合の全体を一つの集合 $\mathfrak{M}$ と定義したとき，この $\mathfrak{M}$ は新しくつくられた集合であって，あらかじめ与えられている集合の中の一つであると推論すること（悪循環）がパラドックスの原因ではなかろうかと．

パラドックスに対する種々のうけとり方のうち，おもな立場についてふれておこう．

（1） **直観主義**　Brouwer などの主張は，数学的な対象や推論が研究の対象となりうるのは，少なくとも無限の対象に関しては，目前に具体的に表わすことのできるような手段が示されている場合に限定すべきだということである．このように無限個の対象を明白に具体化されたものとして見通す能力を直観といい，直観こそ無限のものの存在についての確かな根拠となりうるものであると考える．直観に支えられた確実な概念と推理の仕方だけを用いて結論を導くかぎりパラドックスは生じない．したがって Russell のパラドックスでは「第二種の集合の全体」とか「すべての集合の全体」などというものはこの立場からは考察の対象とはならない．

（2） **論理主義**　Russell などの主張では，パラドックスを引き起す理由は上に述べた悪循環にあると考える．これをさけるためパラドックスの起りそうな場合については推論のうち許されるべきものとそうでないものとを厳密に分け階型の理論を組み立てることになる．

（3） **形式主義**　Hilbert による形式主義では次のように考える．数学の理

論はこれを完全に形式化することができると考えてみよう．この形式化された体系は全く内容のない単なる記号の集まりであるが，これを研究の対象とし，この体系の中で矛盾が生じないことが証明されたとき，はじめて数学理論がパラドックスを含まないと主張できる．ただしこの証明には，どんな立場の人でも納得できるような自明な推論の仕方を用いねばならない．この推論としては有限の立場と称するごく素朴な考え方を用いるのであるが，これについては後に述べる（3·4 節参照）．

B．直観主義の論理

a．対象について　A項で述べたように直観主義の立場で無限個の対象を扱うことができるのはそれらの対象を目前に具体的に表わす手段が与えられているときに限られる．それらの個々の対象は記号の有限の列（これを図形という）で表わすことにする．

無限個の対象の最も基本となる自然数についていえば次のようになる．

まず 1 という記号を考える．次にこの記号に ′ をつけた 1′（2のこと）という図形を考え，さらに 1″（3のこと）という図形を考える．この ′ をつけるという具体的な手段を与えることによって

$$1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\cdots$$

で表わされる図形の列が具体的につくられるが，これをどこまでも続けることができるという根拠は論理を超えた直観によらねばならない．この直観に裏付けされて自然数というものが具体的に数学の対象となると考えられる．

一般にある図形の定義が

（1）　何かある具体的な図形を与え

（2）　次に具体的な図形から別の新しい具体的な図形をつくり出す手段を具体的に与え

（3）　いま考えようとする図形は（1）および（2）でつくられたものに限られる．

という形式で与えられたとき，この定義は**帰納的な定義**（inductive definition）といわれる（1·1 節参照）．無限個のものを定義する最も確実な方法といえよう．

帰納的な定義によれば自然数の定義は次のように与えられる．

（1） 1は自然数である

（2） n が自然数ならば，n' は自然数である

（3） （1），（2）で自然数であるとわかったものだけが自然数である．

次に帰納的な証明法について述べる．いまある対象Tが帰納的な定義によって次のように与えられているとする．

（1） $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はTである． （Tは「項である」と読んでみればわかりやすい）

（2） $x_1, \cdots, x_k$ が T のとき，$f(x_1, \cdots, x_k)$ は T である．

（3） （1），（2）でTとわかったものだけがTである．

さてTであるような任意のxについて，$P(x)$ が成り立つことを証明するには次のようにすればよい．

（1） $P(a_1), \cdots, P(a_n)$ が成り立つことを証明する．

（2） $x_1, \cdots, x_k$ がTのとき，$P(x_1), \cdots, P(x_k)$ がすでに成り立っていると仮定し，$P(f(x_1, \cdots, x_k))$ が成り立つことを証明する．

この（1），（2）がいえれば具体的にxを与えたとき，$P(x)$ の具体的な証明方法が与えられたことになる．このような証明方法を**帰納法**（帰納的な証明法）という．

一般のTについて行なうかわりに前述の自然数（$n=k=1$, $a_1=1$, $f(x)=x'$）について行なったものが**数学的帰納法**（mathematical induction）である．

b．論理式について 直観主義の立場では，考えている対象が有限個の場合は問題ないが，対象として無限個のものをとり扱う場合には，各論理式および推論はすべて直観に裏付けされるようにしなければならない．したがって論理記号もそれぞれ次のようなはっきりした意味に限定して用いる．

$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ も $\mathfrak{B}$ も成り立つことが示されているか，または成り立つことを示すための具体的手段（直観に裏付けられた具体的手段，たとえば帰納的な証明法のようなもの）をもっている．

$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ か $\mathfrak{B}$ か少なくも一方が成り立つことが示されているか，または成り立つことを示すための具体的手段をもっている．

$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ が成り立つという証明が与えられたとき，この証明をもとにして $\mathfrak{B}$ の証明をつくる具体的手段をもっている．

$\neg\mathfrak{A}$　$\mathfrak{A}$が成り立つという証明がえられたと仮定したとき，このことから矛盾を導くことのできるような具体的手段をもっている．

$\forall x\,\mathfrak{F}(x)$　どんなxに対しても，$\mathfrak{F}(x)$が成り立つか，または成り立つことが証明されるような具体的手段をもっている．

$\exists x\,\mathfrak{F}(x)$　$\mathfrak{F}(x)$が成り立つような具体的な対象の一つたとえばnがみいだされたか，またはnをみいだすための具体的な手段をもっている．

以上からわかるように，直観主義でとり扱われる論理式というものは，すべて具体的なものから出発し，直観に裏付けられた具体的な意味をもったものだけが得られるように構成されたものである．したがって通常の論理，たとえば第1，2章で扱った論理（直観主義の論理と区別するときには，古典論理という）で成り立つと考えられている論理式のうち，直観主義の立場では成り立たないと考えられるものが存在する．次に二，三の例を述べる．

(排中律) $\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$　直観主義の立場ではこれが成り立つというのは，次の1〜3のうち少なくも一つが成り立つことであった．

1. $\mathfrak{A}$が成り立つことが証明されている．
2. $\mathfrak{A}$が成り立つという証明が与えられたと仮定したとき，このことから矛盾を導くことのできる具体的な手段をもっている．
3. $\mathfrak{A}$, $\neg\mathfrak{A}$のどちらか一方が成り立つことを示す具体的な手段をもっている．

しかし$\mathfrak{A}$として現在未解決の問題（たとえば Fermat の問題など）をとってくれば1〜3のいずれも成り立たないことは明らかである．

(拡張されたド・モルガンの法則) $\neg\forall x\,\mathfrak{F}(x)\equiv\exists x\neg\mathfrak{F}(x)$　左辺は，どんなxについても$\mathfrak{F}(x)$が成り立つかまたは成り立つことが証明されるような具体的な手段があると仮定すれば，矛盾に導かれることが具体的にわかるということを示しているが，このことから$\neg\mathfrak{F}(x)$の成り立つような具体的な対象nがみいだされるという何の保証も与えられているわけではない（もちろん対象は自然数のように無数にある場合のことであるが）．

直観主義の論理というものは，これを正確に形式化することは本質的に不可能とも考えられるが，Heyting は直観主義で成り立つと考えられる論理式のかなりの部分を形式的に導くことができるような形式的体系をつくることに成功した．ここでは Heyting の公理系と同値であることが証明されている別の

論理体系 NJ について述べる．NJ は以下でわかるようにわれわれが日常考える仕方と非常に近く，そのため自然推論ともよばれる．Gentzen によって考え出されたもので公理をもたず推論規則の連鎖によって結論を導く体系であり，直観主義論理の形式化には理想的な体系である．

3・2 述語計算 NJ

A．NJ の定義

述語計算 NJ で用いられる記号，表現，公理，および推論規則（1·2 節参照）は次のとおりである．

1. 記　号

命題定数　人

命題変数　$A, B, C, \cdots$

自由変数　$a, b, c, \cdots$

束縛変数　$x, y, z, \cdots$

対象定数　$c_1, c_2, c_3, \cdots$

関数記号　$f_1, f_2, f_3, \cdots$

述語記号　$P_1, P_2, P_3, \cdots$

論理記号　$\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$

注　論理記号として便宜上 ≡を用いることがある $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ は $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$ の略記号と考える

2. 表　現

項（2·1 節の定義 1）

論理式（2·1 節の定義 2）

ただしここでは便宜上論理式の定義にさらに次の 2 つを付け加える．

$\begin{cases} \text{命題定数は論理式である} \\ \text{命題変数は論理式である} \end{cases}$

3. 公　理

なし

4. 推論規則　　次の 13 個の推論規則

$\supset_1$　$\wedge_1$　$\vee_1$　$\neg_1$　(α)　$\forall_1$　$\exists_1$

$\supset_2$　$\wedge_2$　$\vee_2$　$\neg_2$　　　$\forall_2$　$\exists_2$

から成り立っている．論理記号につけた数字 1，2 はそれぞれその論理記号の

導入の規則，除去の規則を表わしており，推論規則（α）だけが記号の導入除去という規則性からはみ出している．

いずれも次に述べるように直観主義の立場から成り立つことが明らかなものばかりである（以下 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が成り立つなどと表わしているのは直観主義の立場での意味である）．

$\supset_1$

$$\frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{B}\end{matrix}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}$$

$\mathfrak{A}$ を仮定して $\mathfrak{B}$ が導かれるときには，$\mathfrak{A}$ と無関係に $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ が成り立つことを示している．このとき仮定 $\mathfrak{A}$ はこの推論 $\supset_1$ によって**落ちる**という．推論の右端に任意の数字を書き，仮定 $\mathfrak{A}$ の右肩にもこれと同じ数字を書き，仮定 $\mathfrak{A}$ の落ちたことを表わす．［　］は仮定であることを示しており，以下でも［　］を含む推論規則については，仮定が落ちるという現象がおこるのである．なお……は……の上の論理式から，……の下の論理式を導くのに有限個の推論規則が用いられていることを示している．

$\supset_2$

$$\frac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

これは modus ponens である（1·2節の定義 8）．

$\wedge_1$

$$\frac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ がともに成り立つとき，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ が成り立つという推論を示している．

$\wedge_2$

$$\frac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},\quad \frac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ が成り立つとき，$\mathfrak{A}$ が成り立つという推論を示している．$\mathfrak{B}$ についても同様である．

$\vee_1$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}},\quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}$$

$\mathfrak{A}$ が成り立つとき，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ が成り立つという推論を示している．$\mathfrak{B}$ についても同様である．

$\vee_2$

$$\frac{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\quad \begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{C}\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\mathfrak{B}]\\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{C}\end{matrix}}{\mathfrak{C}}$$

$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ が成り立っていると仮定したとき，$\mathfrak{A}$ が成り立つときと，$\mathfrak{B}$ が成り立つときとに場合分け

し，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ のどちらが成り立つと仮定してもともに $\mathfrak{C}$ が成り立つことが導かれるならば，一般に仮定 $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ と無関係に $\mathfrak{C}$ が成り立つことを示している（ただし $\mathfrak{C}$ は一般には $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ に関係しているから，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ を仮定すれば $\mathfrak{C}$ が導かれる）．仮定 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ はこの推論で落ちる．

$\neg_1$　　$\dfrac{\dfrac{[\mathfrak{A}]}{\curlywedge}}{\neg\mathfrak{A}}$　　$\mathfrak{A}$ の成り立つことを仮定し，これから矛盾が導かれるならば，仮定 $\mathfrak{A}$ と無関係に $\neg\mathfrak{A}$ が成り立つことを示している．

$\neg_2$　　$\dfrac{\mathfrak{A}\quad\neg\mathfrak{A}}{\curlywedge}$　　$\mathfrak{A}$ および $\neg\mathfrak{A}$ の両方が成り立つと仮定すれば，矛盾がおこることを示している．

(α)　　$\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{A}}$　　これは矛盾から任意の論理式 $\mathfrak{A}$ が導けることを示している（この推論についてはあとで述べる）．

次に $\forall$ および $\exists$ についての推論規則を与えるために，論理式が仮定に従属である，独立であるという概念を定義する．

推論規則をつみ重ねて行くとき一番上に現われる論理式を**仮定**という．仮定から推論規則を下へたどり，ある論理式 $\mathfrak{A}$ に達したとき，$\mathfrak{A}$ から上の部分にある有限個の仮定のうちのあるものは推論規則 $\supset_1$, $\vee_2$, $\neg_1$ などで落ち，他のものは残っている．このときまだ落ちていない仮定と，仮定から論理式 $\mathfrak{A}$ までの間に現われるすべての論理式は**仮定に従属している**という．このような仮定が全くないとき，すなわち $\mathfrak{A}$ の上の部分に現われる仮定がすべて落ちているとき，$\mathfrak{A}$ **は仮定から独立である**という．

$\forall_1$　　$\dfrac{\mathfrak{F}(a)}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)}$　　**（変数条件）** a は $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ および $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が従属しているどんな仮定にも現われてはいけない．

変数条件より $\mathfrak{F}(a)$ に用いられている自由変数 a は全く任意の対象であり，任意の a について $\mathfrak{F}(a)$ が成り立つならば $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が成り立つことを示している．

$\forall_2$　$\dfrac{\forall x\,\mathfrak{F}(x)}{\mathfrak{F}(t)}$　どんな x についても $\mathfrak{F}(x)$ が成り立つならば，任意の項 t に対して $\mathfrak{F}(t)$ が成り立つ．

$\exists_1$　$\dfrac{\mathfrak{F}(t)}{\exists x\,\mathfrak{F}(x)}$　$\mathfrak{F}(t)$ が成り立つならば，$\mathfrak{F}(x)$ をみたす x が存在する．

$\exists_2$　$\dfrac{\exists x\,\mathfrak{F}(x)\quad \dfrac{[\mathfrak{F}(a)]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}$　**（変数条件）** a は $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$，$\mathfrak{C}$ および $[\mathfrak{F}(a)]$のすぐ下の $\mathfrak{C}$ が従属しているどんな仮定にも（$\mathfrak{F}(a)$ を除いて）現われてはいけない．

$\mathfrak{F}(x)$ の成り立つような x が存在すると仮定し，いまその x の任意の一つを a としたとき，$\mathfrak{F}(a)$ から $\mathfrak{C}$ が導かれるならば，$\mathfrak{C}$ は a のえらび方とは無関係に（$\exists x\mathfrak{F}(x)$ にだけ関係して）成り立つことを示している．

注　推論規則 $\forall_1$ および $\exists_2$ を用いる場合には，変数条件をみたすことを確かめなければならない．変数条件の内容は次のように考えるとわかりやすい．

推論規則 $\forall_1$ で変数 x の動く範囲がたとえば有限個の元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ からなる集合のとき $\forall_1$ は

$$\wedge_1 \qquad \frac{\mathfrak{F}(e_1)\quad \mathfrak{F}(e_2)\cdots\mathfrak{F}(e_n)}{\mathfrak{F}(e_1)\wedge\mathfrak{F}(e_2)\wedge\cdots\wedge\mathfrak{F}(e_n)}$$

に対応している．この $\wedge_1$ では，どんな $e_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ についても $\mathfrak{F}(e_i)$ が成り立つことが必要である．したがって $\forall_1$ でも $\mathfrak{F}(a)$ はすべての a について成り立つことが必要であり，a は全く任意のものを表わさねばならない．もし a が $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が従属している仮定のどれかに含まれているならば，a はその仮定による制約をうけることとなる．そのために変数条件が必要となる．

同じようにして $\exists_2$ は

$$\vee_2 \qquad \frac{\mathfrak{F}(e_1)\vee\cdots\vee\mathfrak{F}(e_n)\quad \dfrac{[\mathfrak{F}(e_1)]}{\mathfrak{C}}\quad \dfrac{[\mathfrak{F}(e_2)]}{\mathfrak{C}}\cdots\dfrac{[\mathfrak{F}(e_n)]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}$$

に対応している．したがって $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ をみたす任意の $\mathfrak{F}(a)$ に対して，$\mathfrak{F}(a)$ から $\mathfrak{C}$ が導かれていることが必要であり，内容的には $\forall x(\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{C})$ が成り立っていることを意味する．ゆえに任意の a について

$$\frac{\mathfrak{F}(a)\supset\mathfrak{C}}{\forall x(\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{C})}$$

が成り立つための条件として，a は $\forall x(\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{C})$ にもまた $\mathfrak{F}(a)\supset\mathfrak{C}$ が従属するどん

な仮定にも入ってはいけないという変数条件の意味が理解できる.

推論規則を樹の枝の状態につみ重ねてできる図形の一番下に現われる論理式がすべての仮定から独立である——すなわち仮定がすべて落ちている——ときこの論理式は**証明可能** (provable) であるといい，この図形全体をこの論理式の**証明図**という.

まず命題論理の範囲について考えよう．論理記号として $\supset$ だけをもつ（したがって推論規則としては $\supset_1$, $\supset_2$ だけをゆるす）論理系を**原始論理** (primitive logic) という．論理と名付けられる一番簡単な体系である．これに論理記号 $\wedge$, $\vee$ が導入され（したがって $\wedge$, $\vee$ についての推論規則が加わる）た体系を Bernays により**肯定論理** (positive logic) という．否定の概念の導入されていない論理系である．さらにこれに論理記号$\neg$が導入され，はじめて論理体系として一応整った形のものができ上がる．これを Johansson の**最小論理** (minimal logic) という．ここでは 人 が導入されているがこれが恒偽という性質をもつようになるには，さらに（α）が推論規則として導入されたときであり，（α）の導入された最小論理を**直観主義論理** (intuitionistic logic) という．これらの諸論理系にさらに$\forall$, $\exists$についての推論が導入されれば，各論理系に対する述語論理をうる．述語論理の範囲で上に定義した直観主義論理系を NJ (calculus of natural deduction for intuitionistic predicate logic) という.

最後に次の推論規則

$$(\beta) \qquad \frac{\neg\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} \qquad \neg\neg\mathfrak{A}\ \text{が成り立つならば,}\ \mathfrak{A}\ \text{が成り立つ}$$

を NJ に付け加えた体系を NK (calculus of natural deduction for classical predicate logic) で表わす．（β）は NJ において $\neg\neg\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}$ と同値になる.

推論規則（α）の他の規則はたとえば $\wedge_1$ と $\wedge_2$ によって論理記号$\wedge$を定義しているように，論理記号の性質を規定したものであるが，（α）は命題定数人の性質を規定する働きをもっている（（β）は $\neg_1$, $\neg_2$ で定めた$\neg$の性質をなお強化する働きをもっている)．このことを次に述べよう.

直観主義論理では$\neg\mathfrak{A}$が成り立つのは，$\mathfrak{A}$が成り立つと仮定して矛盾が生ず

るときであるという意味をもっていた（3·1 節参照）．したがって直観主義の立場では次の論理式

$$\neg\mathfrak{A}\equiv(\mathfrak{A}\supset\text{人}) \tag{3.1}$$

が成り立つことが望ましいが，実際に NJ で（α）を用いないで（最小論理で）(3.1) を証明することができる．証明図は次のとおりである．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \overset{2}{\mathfrak{A}\supset\text{人}}}{\text{人}}\supset_2}{\neg\mathfrak{A}}\neg_1\ 1}{(\mathfrak{A}\supset\text{人})\supset\neg\mathfrak{A}}\supset_1\ 2 \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \overset{2}{\neg\mathfrak{A}}}{\text{人}}\neg_2}{\mathfrak{A}\supset\text{人}}\supset_1\ 1}{\neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\text{人})}\supset_1\ 2$$

したがって，最小論理における $\neg$ の定義（$\neg_1, \neg_2$）のかわりに $\neg\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}\supset$ 人 によって定義すると，推論規則 $\neg_1, \neg_2$ は不要となる．なぜなら $\neg_1$，$\neg_2$ に現われる $\neg\mathfrak{A}$ をすべて $\mathfrak{A}\supset$人 でおきかえた推論はそれぞれ

$$\cfrac{\cfrac{[\mathfrak{A}]}{\text{人}}}{\mathfrak{A}\supset\text{人}} \quad\text{および}\quad \cfrac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{A}\supset\text{人}}{\text{人}}$$

となり $\supset_1$，$\supset_2$ の特殊な場合となって最小論理で成り立つからである．そこで，（α）を用いていない最小論理では 人 は全く単なる記号で，内容的に矛盾を表わしているという保証は何もない．人という記号が導入されたにすぎない．

任意の論理式 $\mathfrak{A}$ について

$$\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}\equiv\text{人} \tag{3.2}$$

が成り立ってはじめて矛盾という概念が論理系に導入されたということができる．さて（α）を仮定すれば（したがって NJ では），(3.2) が次のようにして証明される．

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\text{人}}}{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}}(\alpha)}{\text{人}\supset\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}}\supset_1\ 1 \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}}\wedge_2\quad \cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}}}{\neg\mathfrak{A}}\wedge_2}{\text{人}}\neg_2}{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}\supset\text{人}}\supset_1\ 1$$

したがって，NJ ではじめて実質的に矛盾の概念が導入されたことになる．

B．証明可能な論理式

前項で述べたいろいろの論理体系で証明可能な論理式のおもなものをあげ，これらに対する証明図の二，三の例を示そう．

a. 命題計算

（1） 原始論理で証明可能な論理式

$$\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}) \tag{3.3}$$

$$(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \tag{3.4}$$

$$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})) \tag{3.5}$$

$$(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})) \tag{3.6}$$

(3.3) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}}\supset_1}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})}\supset_1\ 1$$

この証明では推論規則 $\supset_1$ として

$$\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}$$

を許している．このように $\supset_1$ は仮定 $\mathfrak{A}$ が全く用いられない場合にも用いられる．$\wedge_1$, $\wedge_2$ の成り立つ体系では

$$\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}} \quad を \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\wedge_1}{\mathfrak{B}}\wedge_2}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\supset_1\ 1$$

と考えればわかりやすい．

(3.6) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}^{2}}{\mathfrak{B}}\quad\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})^{3}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\ 1}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})}\ 2}{(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))}\ 3$$

（2） 肯定論理で証明可能な論理式

$$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{B} \tag{3.7}$$

$$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}))) \tag{3.8}$$

$$(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}\equiv\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}) \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\quad \mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \tag{3.10}$$

$$(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\supset\mathfrak{A})) \tag{3.11}$$

(3.9) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{2}\quad\mathfrak{B}^{1}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\qquad \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}^{3}}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}\,1}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})}\,2}{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))}\,3$$

および

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}^{1}}{\mathfrak{B}}\qquad\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}^{1}}{\mathfrak{A}}\qquad\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})^{2}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}\,1}{(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})}\,2$$

(3.11) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}^{2}\qquad\dfrac{\mathfrak{B}^{1}\quad\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}^{4}}{\mathfrak{A}}\qquad\dfrac{\mathfrak{C}^{1}\quad\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}^{3}}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}}\,1}{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}}\,2}{(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})}\,3}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}))}\,4$$

（3） 最小論理で証明可能な論理式

$$\neg(\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}) \tag{3.12}$$

$$\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}) \tag{3.13}$$

$\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ は成り立たない ((3.28) 参照).

$$\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A} \tag{3.14}$$

$$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A}) \tag{3.15}$$

(3.15) の逆は成り立たない ((3.30) 参照).

$$\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A} \tag{3.16}$$

(3.16) の逆は成り立たない ((3.29) 参照).

$$\neg\neg\neg\mathfrak{A}\equiv\neg\mathfrak{A} \tag{3.17}$$

$$\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\equiv(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B}) \tag{3.18}$$

$$\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\equiv\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B} \tag{3.19}$$

$$\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}\supset\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}) \tag{3.20}$$

(3.20) の逆は成り立たない ((3.35) 参照).

ただし (3.35) を弱くした次の論理式は成り立つ

$$(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\supset(\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B})) \tag{3.21}$$

$$\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\equiv\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B}) \tag{3.22}$$

(3.13) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})^{2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})^{2} \quad \dfrac{\mathfrak{A}^{1}}{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{A}}\,1}{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\text{人}}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}\,2$$

(3.16) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{2} \quad \neg\mathfrak{A}^{1}}{\text{人}}}{\neg\neg\mathfrak{A}}\,1}{\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A}}\,2$$

(3.21) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}^{4} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{2}\quad\mathfrak{B}^{1}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}} \quad \neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})^{3}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{B}}\,1}{\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}} \quad \dfrac{\neg\mathfrak{A}^{2}}{\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}}}{\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}}\,2}{\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B})}\,3}{(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\supset(\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}))}\,4$$

(3.21)は $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$ の形の証明可能でない論理式に対し，$\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$ が証明可能となる例を示している．同じようにして

$$(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset(\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}))$$

も成り立つことがわかる．

(4) NJ で証明可能な論理式

$$\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}) \qquad (3.23)$$

$$\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \qquad (3.24)$$

(3.24) の逆は成り立たない ((3.33) 参照)．

$$\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}\supset(\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}) \qquad (3.25)$$

$$\neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \qquad (3.26)$$

$$\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}\wedge\neg\mathfrak{B} \qquad (3.27)$$

(3.24) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}^{3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1} \quad \neg\mathfrak{A}^{2}}{\text{人}}}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,{}^{1} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}^{2}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,{}^{2}}{(\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}\,{}^{3}$$

(3.24) で $\mathfrak{A}$ を $\neg\neg\mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}$ でおきかえ，(3.17) を用いると (3.25) をうる．また (3.13)，(3.25) を用いると (3.23) をうる．

(3.26) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1} \quad \neg\mathfrak{A}^{2}}{\text{人}}}{\mathfrak{B}}\,(\alpha)}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,{}^{1}}{\neg\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}\,{}^{2}$$

(3.27) の証明の前半

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}^{1}}{\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}^{1}}{\neg\mathfrak{A}}}{\text{人}}}{\mathfrak{B}}\,(\alpha)}{\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,{}^{1}$$

（5） NK で証明可能な論理式

$\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ (3.28)

$\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ (3.29)

$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ (3.30)

$((\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{B})$ (3.31)

$(\neg\mathfrak{B}\supset\neg\mathfrak{A})\supset((\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B})$ (3.32)

$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ (3.33)

$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$ (3.34)

$\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\equiv\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}$ (3.35)

$((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}$ (3.36)

(3.28) は (3.13) と (β) より導かれ，(3.29) は (3.23) と (β) から導かれる．(3.29) と $\supset_2$ より (β) が導かれるから，NJ に (3.28) または (3.29) を公理として付け加えれば NK がえられることがわかる．他の論理式の証明図も容易に作ることができるので，ここでは Peirce の論理式 (3.36) の証

明図を与えておく．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad \neg\mathfrak{A}^{2}}{\text{人}}}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,1\quad (\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A}^{3}}{\mathfrak{A}}\qquad \neg\mathfrak{A}^{2}}{\text{人}}}{\neg\neg\mathfrak{A}}\,2}{\mathfrak{A}}(\beta)}{((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}}\,3$$

なお Peirce の論理式を NJ に付け加えれば NK になることが証明されている．

b．述語計算

（1） NJ で証明可能な論理式

$$\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\mathfrak{F}(t) \tag{3.37}$$

$$\mathfrak{F}(t)\supset\exists x\,\mathfrak{F}(x) \tag{3.38}$$

$\forall_2$，$\exists_1$ および $\supset_2$ から導かれる． t はその特別の場合として自由変数 a におきかえても成り立つ

$$\forall x\,\mathfrak{F}(x)\equiv\forall y\,\mathfrak{F}(y) \tag{3.39}$$

$$\exists x\,\mathfrak{F}(x)\equiv\exists y\,\mathfrak{F}(y) \tag{3.40}$$

(3.39) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\mathfrak{F}(x)^{1}}{\mathfrak{F}(a)}}{\forall y\,\mathfrak{F}(y)}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\forall y\,\mathfrak{F}(y)}\,1 \qquad \left(\begin{array}{l} a\text{は }\forall x\,\mathfrak{F}(x)\text{ に含ま} \\ \text{れない変数とする} \end{array}\right)$$

およびこの証明で x, y を入れかえたものが成り立つから，$\wedge_1$ を用いればよい．

$$\neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)\equiv\forall x\neg\mathfrak{F}(x) \tag{3.41}$$

(3.41) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(a)^{1}}{\exists x\,\mathfrak{F}(x)}\quad \neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)^{2}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{F}(a)}\,1}{\forall x\neg\mathfrak{F}(x)}\,\forall_1}{\neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)\supset\forall x\neg\mathfrak{F}(x)}\,2$$

$\forall_1$：a として $\mathfrak{F}(x)$ に含まれない自由変数を用いると，a は $\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ にもまた $\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ が従属する仮定 $\neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ にも入らないから変数条件をみたしている．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x\,\mathfrak{F}(x)^{2}\qquad \cfrac{\mathfrak{F}(a)^{1}\qquad \cfrac{\forall x\neg\mathfrak{F}(x)^{3}}{\neg\mathfrak{F}(a)}}{\text{人}}}{\text{人}}\;\exists_2\;1}{\neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)}\;2}{\forall x\neg\mathfrak{F}(x)\supset\neg\exists x\,\mathfrak{F}(x)}\;3$$

$\exists_2$：a は $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$，人，$\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ に入らないから変数条件をみたす．

$$\neg\exists x\neg\mathfrak{F}(x)\equiv\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x) \qquad (3.42)$$

(3.42) の証明は (3.41) で $\mathfrak{F}(x)$ を $\neg\mathfrak{F}(x)$ でおきかえればよい．

$$\exists x\neg\mathfrak{F}(x)\supset\neg\forall x\,\mathfrak{F}(x) \qquad (3.43)$$

NK では (3.43) の逆も成り立つ．

(3.43) の証明

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x\neg\mathfrak{F}(x)^{3}\qquad \cfrac{\neg\mathfrak{F}(a)^{1}\qquad \cfrac{\forall x\,\mathfrak{F}(x)^{2}}{\mathfrak{F}(a)}}{\text{人}}}{\text{人}}\;\exists_2\;1}{\neg\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\;2}{\exists x\neg\mathfrak{F}(x)\supset\neg\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\;3$$

$\exists_2$：a は $\exists x\neg\mathfrak{F}(x)$，人 および $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ に入っていない．

$$\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\neg\exists x\neg\mathfrak{F}(x) \qquad (3.44)$$

NK では (3.44) の逆も成り立つ．

(3.44) の証明　(3.43) の両辺の否定をとる ((3.15) 参照) と，$\neg\neg\forall x\,\mathfrak{F}(x)\supset\neg\exists x\neg\mathfrak{F}(x)$ をうる．これと (3.16) を用いればよい．

$$\exists x\,\mathfrak{F}(x)\supset\neg\forall x\neg\mathfrak{F}(x) \qquad (3.45)$$

NK では (3.45) の逆も成り立つ．

(3.45) の証明　(3.43) で $\mathfrak{F}(x)$ を $\neg\mathfrak{F}(x)$ でおきかえて (3.16) を用いる．

$$\forall x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)\equiv\forall y\forall x\,\mathfrak{F}(x,y) \qquad (3.46)$$

(3.46) の証明前半

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)^{1}}{\forall y\,\mathfrak{F}(a,y)}}{\mathfrak{F}(a,b)}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x,b)}\,\forall_1}{\forall y\forall x\,\mathfrak{F}(x,y)}\,\forall_1}{\forall x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)\supset\forall y\,\forall x\,\mathfrak{F}(x,y)}\;1$$

$$\exists x\exists y\,\mathfrak{F}(x,y)\equiv\exists y\exists x\,\mathfrak{F}(x,y) \tag{3.47}$$

$$\exists x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)\supset\forall y\exists x\,\mathfrak{F}(x,y) \tag{3.48}$$

(3.48) の逆は（NK でも）成り立たない.

(3.48) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)^{2}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\,\mathfrak{F}(a,y)^{1}}{\mathfrak{F}(a,b)}}{\exists x\,\mathfrak{F}(x,b)}}{\forall y\exists x\,\mathfrak{F}(x,y)}\,\forall_1}{\forall y\exists x\,\mathfrak{F}(x,y)}\,\exists_2\;1}{\exists x\forall y\,\mathfrak{F}(x,y)\supset\forall y\exists x\,\mathfrak{F}(x,y)}\;2$$

$$\forall x(\mathfrak{F}(x)\wedge\mathfrak{G}(x))\equiv\forall x\,\mathfrak{F}(x)\wedge\forall x\,\mathfrak{G}(x) \tag{3.49}$$

$$\exists x(\mathfrak{F}(x)\vee\mathfrak{G}(x))\equiv\exists x\,\mathfrak{F}(x)\vee\exists x\,\mathfrak{G}(x) \tag{3.50}$$

(3.49) の証明前半

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\mathfrak{F}(x)\wedge\mathfrak{G}(x))^{1}}{\mathfrak{F}(a)\wedge\mathfrak{G}(a)}}{\mathfrak{F}(a)}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\mathfrak{F}(x)\wedge\mathfrak{G}(x))^{1}}{\mathfrak{F}(a)\wedge\mathfrak{G}(a)}}{\mathfrak{G}(a)}}{\forall x\,\mathfrak{G}(x)}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)\wedge\forall x\,\mathfrak{G}(x)}}{\forall x(\mathfrak{F}(x)\wedge\mathfrak{G}(x))\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)\wedge\forall x\,\mathfrak{G}(x)}\;1$$

$$\forall x\,\mathfrak{F}(x)\vee\forall x\,\mathfrak{G}(x)\supset\forall x(\mathfrak{F}(x)\vee\mathfrak{G}(x)) \tag{3.51}$$

$$\exists x(\mathfrak{F}(x)\wedge\mathfrak{G}(x))\supset\exists x\,\mathfrak{F}(x)\wedge\exists x\,\mathfrak{G}(x) \tag{3.52}$$

(3.51), (3.52) の逆は成り立たない.

$$\forall x(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(x))\equiv(\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)) \tag{3.53}$$

(3.53) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\qquad \dfrac{\forall x(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(x))^{2}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(a)}}{\mathfrak{F}(a)}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)}}{\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\;1}{\forall x(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(x))\supset(\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x))}\;2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad \mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x)^{2}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x)}}{\mathfrak{F}(a)}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(a)}\;1}{\dfrac{\forall x(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(x))}{(\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}(x))\supset\forall x(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}(x))}}\;2$$

$$\exists x \neg\neg \mathfrak{F}(x) \supset \neg\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \tag{3.54}$$

(3.54) の逆は NK でしかいえない.

(3.54) の証明は (3.43) で $\mathfrak{F}(x)$ を $\neg\mathfrak{F}(x)$ でおきかえ，これの右辺に (3.41) を用いればよい.

$$\neg\neg \forall x \mathfrak{F}(x) \supset \forall x \neg\neg \mathfrak{F}(x) \tag{3.55}$$

(3.55) の逆は NK でしかいえない.

(3.43) に (3.15) を用いて，$\neg\neg \forall x \mathfrak{F}(x) \supset \neg \exists x \neg \mathfrak{F}(x)$

これに (3.41) を代入すれば (3.55) をうる.

(3.55) の逆は成り立たない.

(2) NK で証明可能な論理式　(3.43) の逆は NK で成り立つ．すなわち，(3.41) と (3.29) を用いると

$$\neg \forall x \mathfrak{F}(x) \supset \exists x \neg \mathfrak{F}(x) \tag{3.56'}$$

をうる．これと (3.43) より

$$\neg \forall x \mathfrak{F}(x) \equiv \exists x \neg \mathfrak{F}(x) \tag{3.57}$$

がえられる．したがって NJ において (3.43) より直接導かれた (3.44)，(3.45) などについてもそれらの逆はすべて成り立つ.

なお NJ では $\neg, \supset, \wedge, \vee$ のうち，一つを残りの三つの記号で表わすことは不可能である (McKinsey).

3・3 Glivenko の定理

定理 1 (Glivenko)　命題計算 NK において論理式 $\mathfrak{A}$ が証明可能ならば，$\neg\neg\mathfrak{A}$ は NJ で証明可能であり，逆も成り立つ．すなわち

$$\vdash_{\mathrm{NK}} \mathfrak{A} \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{NJ}} \neg\neg\mathfrak{A}$$

証明 ⇒　NK で証明可能な論理式を $\mathfrak{A}$ とする．$\mathfrak{A}$ の証明図に現われるすべての論理式のまえに $\neg\neg$ をつけた図形が NJ 証明図であることを示せば，$\neg\neg\mathfrak{A}$ の NJ 証明図がえられたことになる.

したがってすべての推論規則に対し，その規則の仮定の論理式のまえにそれぞれ$\neg\neg$をつけたものから，結論の論理式のまえに$\neg\neg$をつけたものを NJ で導くことができることを示せば十分である.

まず，推論規則 $\wedge_1$ に対しては $\neg\neg\mathfrak{A}$ および $\neg\neg\mathfrak{B}$ を仮定して NJ の推論

規則をいくつか用いて $\neg\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$ を導けばよい．このことを簡単に

$$\frac{\neg\neg\mathfrak{A}\quad\neg\neg\mathfrak{B}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}$$

で表わそう．これは次のように行なえばよい．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad\mathfrak{B}^{2}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\quad\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})^{3}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{A}}\,{}^{1}\quad\neg\neg\mathfrak{A}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{B}}\,{}^{2}\quad\neg\neg\mathfrak{B}}{\text{人}}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}\,{}^{3}$$

推論規則 $\wedge_2$ については

$$\frac{\neg\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}{\neg\neg\mathfrak{A}}$$

を示せばよい．これは次のように行なえばよい．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}^{1}}{\mathfrak{A}}\quad\neg\mathfrak{A}^{2}}{\text{人}}}{\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}\,{}^{1}\quad\neg\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}{\text{人}}}{\neg\neg\mathfrak{A}}\,{}^{2}$$

ここで

$$\frac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\quad\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}$$

が成り立つことを示しておこう．証明は次のとおり．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}\quad\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\quad\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\,{}^{1}$$

これを用いると

$\supset_1$ に対応する

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \neg\neg\mathfrak{B}\end{array}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}$$

は次のように証明される.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(3.16)}{\mathfrak{A}\supset\neg\neg\mathfrak{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\mathfrak{A}^{1}}{\neg\neg\mathfrak{B}} \quad \neg\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{B}^{2}}{\mathfrak{B}}}{\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,{\scriptstyle 1}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}} \quad \neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})^{3}}{\text{人}}}{\neg(\neg\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{B})}\,{\scriptstyle 2} \quad \dfrac{(3.23)}{\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{B}\supset\mathfrak{B})}}{\dfrac{\text{人}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}\,{\scriptstyle 3}}
$$

$\supset_2$ に対応する

$$
\dfrac{\neg\neg\mathfrak{A} \quad \neg\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}{\neg\neg\mathfrak{B}}
$$

は次のように証明される.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1} \quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}^{2}}{\mathfrak{B}} \quad \neg\mathfrak{B}^{3}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{A}}\,{\scriptstyle 1} \quad \neg\neg\mathfrak{A}}{\dfrac{\text{人}}{\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}\,{\scriptstyle 2}} \quad \neg\neg(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}{\dfrac{\text{人}}{\neg\neg\mathfrak{B}}\,{\scriptstyle 3}}
$$

$\vee_1$ に対応する

$$
\dfrac{\neg\neg\mathfrak{A}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})}
$$

は次のとおりである.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^{1}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}} \quad \neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})^{2}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{A}}\,{\scriptstyle 1} \quad \neg\neg\mathfrak{A}}{\dfrac{\text{人}}{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})}\,{\scriptstyle 2}}
$$

$\vee_2$ に対応する

$$
\dfrac{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}) \quad \dfrac{[\neg\neg\mathfrak{A}]}{\neg\neg\mathfrak{C}} \quad \dfrac{[\neg\neg\mathfrak{B}]}{\neg\neg\mathfrak{C}}}{\neg\neg\mathfrak{C}}
$$

は次のように証明される.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B}}^{2}\qquad \begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{A}]^{1}\\ \vdots\\ \neg\neg\mathfrak{C}\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{B}]^{1}\\ \vdots\\ \neg\neg\mathfrak{C}\end{array}}{\neg\neg\mathfrak{C}}\,1\qquad \neg\mathfrak{C}^{3}}{\curlywedge}}{\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B})}\,2$$

および

$$\dfrac{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\qquad \dfrac{(3.22)}{\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B})}}{\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B})}$$

の一番下にある二つの論理式を用いて

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B})\qquad \neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A}\vee\neg\neg\mathfrak{B})}{\curlywedge}}{\neg\neg\mathfrak{C}}\,3$$

と導くことができる.

最後に, $\neg_1$ および $\neg_2$ に対応する

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \curlywedge\end{array}}{\neg\neg\neg\mathfrak{A}} \quad \text{および} \quad \dfrac{\neg\neg\mathfrak{A}\qquad \neg\neg\neg\mathfrak{A}}{\curlywedge}$$

が成り立つことは明らかである.

$\Leftarrow$ $\vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\neg\mathfrak{A}\Rightarrow\vdash_{\mathrm{NK}}\neg\neg\mathfrak{A}$ であること, および $\vdash_{\mathrm{NK}}\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ が成り立つことから明らかである. *qed*

系 1 $\vdash_{\mathrm{NK}}\neg\mathfrak{A}\Longleftrightarrow\vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\mathfrak{A}$ (Glivenko)

証明

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathrm{NK}}\neg\mathfrak{A} &\Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\neg\neg\mathfrak{A} && (\text{定理 1 より})\\ &\Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\mathfrak{A} && (\vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\neg\neg\mathfrak{A}\equiv\neg\mathfrak{A}\ \text{より})\end{aligned}$$ *qed*

系 2 $\mathfrak{A}$ が論理記号として $\wedge,\neg$ だけを含むとき

$$\vdash_{\mathrm{NK}}\mathfrak{A}\Longleftrightarrow\vdash_{\mathrm{NJ}}\mathfrak{A} \qquad (\text{Gödel})$$

証明 $\mathfrak{A}$ を NK で証明可能とする. $\mathfrak{A}$ の一番外側の記号により二つの場合に分ける. $\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$ の形のときは系 1 よりすでに証明は終わっている. したがって $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$ の形のとき成り立つことを示せばよい. $\mathfrak{A}$ に含まれる $\wedge$ の個数による帰納法で証明する. $\mathfrak{B}$ および $\mathfrak{C}$ については帰納法の仮定より NJ で証

明可能であることがいえている．これから $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$ が NJ で証明可能であることは，$\wedge_1$ より明らかである． *qed*

次に Glivenko の定理を述語計算の場合に拡張する．

定理 2 $\mathfrak{A}$ を述語計算 NK における論理式とし，$\forall x\,\mathfrak{F}(x)$（または $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$）の形の $\mathfrak{A}$ の部分論理式をすべて $\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)$（または $\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x)$）でおきかえて $\mathfrak{A}$ からできる論理式を $\mathfrak{A}^*$ とするとき，次の関係が成り立つ．

$$\vdash_{\mathrm{NK}}\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{NJ}}\neg\neg\mathfrak{A}^*$$

証明 $\forall$および$\exists$についての推論規則に対応して

$$\forall_1\quad \frac{\neg\neg\mathfrak{F}(a)}{\neg\neg\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)} \qquad\qquad \forall_2\quad \frac{\neg\neg\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)}{\neg\neg\mathfrak{F}(t)}$$

$$\exists_2\quad \frac{\neg\neg\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x) \qquad \begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{F}(a)]\\ \vdots \\ \neg\neg\mathfrak{C}\end{array}}{\neg\neg\mathfrak{C}} \qquad\qquad \exists_1\quad \frac{\neg\neg\mathfrak{F}(t)}{\neg\neg\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x)}$$

がいずれも NJ で許される推論であることを示せばよい．ただし $\forall_1, \exists_2$ については変数条件がみたされている必要がある．証明はいずれも前に述べた$\wedge$および$\vee$の場合と同じ考えでやればよい．$\exists_2$ について述べる．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x)^{1} \qquad \begin{array}{c}[\neg\neg\mathfrak{F}(a)]\\ \vdots \\ \neg\neg\mathfrak{C}\end{array}}{\neg\neg\mathfrak{C}} \qquad \neg\mathfrak{C}^{2}}{\text{人}}\;1}{\neg\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x)} \qquad \neg\neg\exists x\neg\neg\mathfrak{F}(x)}{\cfrac{\text{人}}{\neg\neg\mathfrak{C}}\;2}$$

$\forall_1$ については次のとおりである．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg\mathfrak{F}(a)}{\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)} \qquad \neg\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)^{1}}{\text{人}}}{\neg\neg\forall x\neg\neg\mathfrak{F}(x)}\;1$$

$\forall_2$, $\exists_1$ の場合も $\forall_1$ と同じようにして証明できる． *qed*

3・4 有限の立場

A. 有限の立場

本章の始めに述べたように論理への反省の主な動機の一つは Russell のパ

ラドックスの出現であった．これに対処するための二つの大きい立場，直観主義の立場と形式主義の立場では，数学のいろいろの理論体系をとり扱う際にも，もちろん根本的な相違がある．直観主義にあっては数学の理論を展開して行くときには，推論を進める度ごとに直観的な裏付けを必要とし，この立場を貫く限りパラドックスを生ずることはない．ただ従来成り立つと考えられてきた数学の諸結果のうち，かなり多くの部分はこの立場では成り立たなくなる．それは排中律を無制限に用いることが禁じられているという事実からも推測されることである．形式主義では数学の理論を形式的体系として一般的にとらえる．そのために公理と推論規則をもうけ，数学を論理的な演繹体系として組立て，この体系のことばすなわち記号で規定されたもののほか，一切の先入感を排除する．したがって形式的体系は全く内容を考えない単なる記号の列であるとみなす．そしてこの体系から決して矛盾が導かれないということを，より確かな論法を用いて証明しようと試みる．このように記号を用いて構成された形式的体系を考察の対象とし，この対象の無矛盾性を証明する理論を Hilbert は**証明論** (Beweistheorie) と名付けた．証明論とは数学の証明自身を研究の対象とする理論であるということができる．またこの理論を展開するにはできるだけ確実な論法を用いる必要があるが，この論法を用いる立場を**有限の立場**(finite standpoint) という．この立場としては考えようとする対象や述語，関数，推論などをいままでのように無制限に用いることはゆるされない．まず有限個の対象——対象は記号を有限個ならべた図形として表わされるが——しかとり扱わないとすれば確かさについては問題はないが，数学の本質的なことについては何一つ議論できない．次に無限個の対象をとり扱うとすれば，最も確実な対象は有限回の操作でたどりつける対象だけに制限することであろう．これは直観主義の立場と本質的には同じであり，帰納的な定義によって与えられるものだけを考察の対象とすることにほかならない．このような対象を**構成的** (constructive) ということもある．

直観主義の立場で定義された自然数 (3·1 節参照) は有限の立場でとり扱う対象である．すなわち，有限の立場での自然数は 1，$1'$，$1''$，…であり，これらを簡単に1，2，3と表わすこともある．

次に述語や関数についても，有限の立場で扱うのは帰納的に定義されるもの

に限定する．帰納的に定義される述語の一例として次のものがあげられる．いま n を自然数とする．したがって n は 1 に $'$ が $n-1$ 個ついた図形で表わされている．このとき「n は偶数である」を表わす述語を $E(n)$ とすれば，$E(n)$ は帰納的に次の 1)〜3) で定義できる．

1) $E(1')$ は成り立つ

2) $E(n)$ が成り立つならば，$E(n'')$ も成り立つ．

3) 1)，2) で定義されたものだけが成り立つ．

また帰納的に定義される関数の例もあげておこう．m，n を自然数とするとき，加法＋は次の二式で帰納的に定義される．

$$n+1=n';\quad n+m'=(n+m)'$$

これによってたとえば $n+2$ を計算するには $n+1'=(n+1)'=(n')'=n''$ とすればよい．このように帰納的に定義された関数は n, m のどんな値に対しても $n+m$ を具体的に計算する方法を与えたことになる．同じようにして乗法およびベキはそれぞれ次の二式で帰納的に定義することができる．

$$n\cdot 1=n;\quad n\cdot m'=n\cdot m+n$$

$$n^1=n;\quad n^{m'}=n^m\cdot n$$

推論に関しても対象が有限の場合には直観主義の立場で成り立つような種々の推論が成り立つ．また帰納的に定義された無限個の対象についてある性質を証明するのに，帰納的な証明法を用いることもまた有限の立場で許される推論である．ある n に関する性質 $F(n)$ を帰納的な証明法で証明すれば $F(1)$，$F(2)$，$F(3)$，…が具体的に証明されたことになるから，どのような自然数をもってきても，この数まで確かめる具体的な方法が与えられたことになるからである．

B．有限の立場での自然数および超限順序数

a．自然数　有限の立場における自然数は 1，$1'$，$1''$，… で表わされることはすでに述べた．これら有限の立場における自然数を**数字**（numeral）といい，1，2，3，…，n，…と書く．数字を用いて実際に計算を行なうためには，さらに関数記号＋や・が導入されなければならないが，加法や乗法が帰納的に定義される（具体的な数字を与えたときそれらの和や積が一意に存在する）ためには，さらに関数記号 $'$ についての条件が必要になる（第5章では自然数が

Peano の公理を用いて形式的に定義される). その結果 ′ が $+1$ を意味することが証明され, 1, 2, 3, …は計算のできる自然数として意味をもってくる.

二つの数字 m と n が全く同じ図形であるとき, 等しいと定義し, $m=n$ と書く. また m と書かれた数字が n と書かれた数字より ′ の個数が多いとき, m は n より大または n は m より小であると定義し, $m>n$ または $n<m$ と書く.

b. 超限順序数　さて次に有限の立場で, 超限順序数を定義し, またそれらの間の等号=, 不等号<を定義する. ω などの集合論の記法を用いるけれども, 定義は有限の立場を超えるものではない.

超限順序数 (transfinite ordinal number) の集合 $\mathfrak{S}_n$ を次のように帰納的に定義しよう.

1. $\mathfrak{S}_0$ は数字0だけからなる集合である. $0=0$ は成り立つ. また $0<0$ は成り立たないと定義する.
2. 次に集合 $\mathfrak{S}_n$(n は数字または0とする) が定義され, $\mathfrak{S}_n$ の元について = および < がすでに定義されていると仮定しよう. このとき集合 $\mathfrak{S}_{n+1}$ を次のように定義しよう.

   $\mathfrak{S}_{n+1}$ の元は $\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$ の形の順序数である. ただし $\alpha_i \in \mathfrak{S}_n$ とし, $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu$ (ν は任意の数字) をみたすとする. また数字0は集合 $\mathfrak{S}_{n+1}$ に含まれるものとする.

   =, <に関しては次のように定義する.

   $\mathfrak{S}_{n+1}$ の二つの元を β, γ とし

$$\beta=\omega^{\beta_1}+\omega^{\beta_2}+\cdots+\omega^{\beta_\mu}$$

$$\gamma=\omega^{\gamma_1}+\omega^{\gamma_2}+\cdots+\omega^{\gamma_\nu} \qquad \beta_i,\ \gamma_j \in \mathfrak{S}_n$$

   とするとき

$$\beta=\gamma \iff \mu=\nu \quad \text{かつ} \quad \beta_i=\gamma_i \ (i=1,2,\cdots,\mu)$$

$$\beta<\gamma \iff (\beta_1<\gamma_1) \ \text{あるいは} \ (\beta_i=\gamma_i \ \text{かつ} \ \beta_{i+1}<\gamma_{i+1} \ (i=1,2,\cdots))$$
$$\text{あるいは} \ (\mu<\nu \ \text{かつ} \ \beta_i=\gamma_i \ (i=1,2,\cdots,\mu))$$

   とする. ただし $\beta<\gamma$ は $\gamma>\beta$ と同じであると定める. またとくに数字0は任意の0でない順序数より小であると定める
3. 1, 2 で順序数と定められたものだけが順序数である.

$\mathfrak{S}_n$ の元は $n=0,1$ のとき**有限順序数**, $n\geqq 2$ のとき**超限順序数**といわれる.

上の定義から次のことは容易に確かめられる.

1. $\mathfrak{S}_0\subset\mathfrak{S}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{S}_n\subset\cdots$

2. $\alpha,\beta\in\mathfrak{S}_n$ のとき，$\mathfrak{S}_n$ で $\alpha<\beta$ ならば，$\mathfrak{S}_m$ $(n<m)$ においても $\alpha<\beta$ が成り立つ.

3. 与えられた任意の図形が順序数であるか否かを判定することができる.

4. 与えられた二つの順序数について，それらが等しいか，また一方が他方より小さいか否かを判定することができる.

参考までに $\mathfrak{S}_0,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2$ を具体的に述べれば次のようである.

$\mathfrak{S}_0=\{0\}$

$\mathfrak{S}_1=\{0,\ \omega^0,\ \omega^0+\omega^0,\ \omega^0+\omega^0+\omega^0,\cdots\}$

集合論的な記法で書けば $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ を表わしている.

この集合の極限数は ω である（ω^0 を 1 と略し，＋を加法と思えばよい）

$\mathfrak{S}_2=\{0,\omega^0,\omega^0+\omega^0,\omega^0+\omega^0+\omega^0,\cdots,\omega^{\omega^0},\omega^{\omega^0}+\omega^0,\omega^{\omega^0}+\omega^0+\omega^0,\cdots,$
$\omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0},\omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0,\cdots,\omega^{\omega^0+\omega^0},\cdots,\omega^{\omega^0+\omega^0+\omega^0},\cdots\}$

集合論の記法にしたがえば（ω^{ω^0} を ω^1，すなわち ω と思えば）

$\{0,1,2,3,\cdots,\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\cdots$
$\omega\cdot 2,\ \omega 2+1,\cdots,\omega^2,\cdots,\ \omega^3\cdots\}$ を表わしている.

$\mathfrak{S}_2$ は ω^ω より小さいすべての順序数の集合を表わす.

同じように考えると $\mathfrak{S}_3,\mathfrak{S}_4,\cdots$は

$$\omega^{\omega^{\omega}},\quad \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

よりそれぞれ小さいすべての順序数の集合を表わしていることがわかる.

すべての n に対し $\mathfrak{S}_n$ の極限数が ε_0（最初の ε 数）である.

0ではない二つの順序数 α，β に対し，α，β の**自然和**（natural sum）を次のように定義する.

$$\alpha=\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\cdots+\omega^{\alpha_\mu}$$
$$\beta=\omega^{\beta_1}+\omega^{\beta_2}+\cdots+\omega^{\beta_\nu}\qquad\text{ただし }\mu\geqq 1,\ \nu\geqq 1$$

とするとき，$\mu+\nu$ 個の項 $\omega^{\alpha_i},\omega^{\beta_j}$ を大きさの順に並べ，最も大きいものを最初に，最も小さいものを最後に書き，同じ項はならべて書き，これら $\mu+\nu$ 個

をすべて記号＋で結合したものを $\alpha \# \beta$ と書き，α，β の自然和という．

例

$$\alpha=\omega^{\omega^{1}+1}+1$$

$$\beta=\omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}}+\omega^{\omega^{1}+1}+\omega^{1}$$

のとき

$$\alpha \# \beta=\omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}}+\omega^{\omega^{1}+1}+\omega^{\omega^{1}+1}+\omega^{1}+1$$

となる．ただし ω^0 を $\mathbf{1}$ で表わしてある．

natural sum について，次の関係は容易に証明できる．

1. $\alpha \# \beta=\beta \# \alpha$
2. $\alpha \# \beta>\alpha$
3. $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha \# \gamma<\beta \# \gamma$

第4章　述語計算 LK

第4章では前章の自然推論による体系 NJ, NK を改良し，式という新しい概念の導入された体系 LJ, LK を紹介する．また，それらの体系の無矛盾証明を展開する．まず4·1節では Gentzen による論理体系 LK の定義およびそのおもな特徴にふれ，また LJ は LK の式の概念に簡単な制限をつけた体系として得られることを示す．4·2節では LK の基本定理を証明する．これは誠に美しい定理であるばかりでなく，数々の重要な応用をもっている．数理論理学の基本定理と名付けるにふさわしいものといえよう．4·3節では基本定理の簡単な応用として，古典述語論理 LK，直観主義述語論理 LJ の無矛盾性の証明および古典命題論理，直観主義命題論理の決定問題の解法を示す．基本定理に述べられた考え方はいろいろの体系に応用され，論理の研究には欠くことのできないものである．この考え方は次章で本質的な役割を果たしている．

4·1　LK

A．LK の定義

前章の3·2節で述べた述語計算 NK は，われわれが日常ものを考える仕方をかなり忠実に形式化したものであり，各論理記号について，それぞれ記号の導入の規則と除去の規則に整とんされていた．一番大きい特徴は公理を一切もうけないという点にあり，Hilbert の公理系とは対照的であるといえる．しかし一面「仮定が落ちる」という考えが導入されており，NK の証明図を一つ与えれば，この中に現われる各論理式には，それが従属する仮定が一意に定まっている（NK で証明可能な論理式のように従属する仮定がない場合も含めて）．そこで各論理式にはそれが従属している仮定を何らかの方法で同時に記入することにすれば，仮定を落とすという操作をなくすことができ，形式的にとり扱いやすくなる．事実このようなことも考慮に入れて Gentzen は NK をもとに sequential calculus とよばれる体系 LK および LJ を構成し，この体系を用いて基本定理とよばれるすばらしい定理の証明に成功したのである．

いま NK の証明図において論理式 $\mathfrak{B}$ が仮定 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu$ に従属しているとき，証明図の中で $\mathfrak{B}$ のところを次の図形

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

でおきかえることにしよう．とくに $\mathfrak{B}$ が人のときは $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to$ と書くことにし，また $\mathfrak{B}$ がどんな仮定からも独立であるとき，$\to \mathfrak{B}$ と書くことにする．このようにいくつかの論理式を → で結合した図形を式という．記号 → は補助的な記号であって論理記号ではない．→ の左側を左辺，→ の右側を右辺という．まえに述べた論理式 (3.41) $\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \supset \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$ の NK の証明図を例にとって考えてみよう．

まず $\mathfrak{F}(a)$ および $\exists x \mathfrak{F}(x)$ はともに仮定 $\mathfrak{F}(a)$ に従属し，$\neg \exists x \mathfrak{F}(x)$ はそれ自身に従属している．したがって人は $\neg \exists x \mathfrak{F}(x)$ および $\mathfrak{F}(a)$ に従属し，次の推論で仮定 $\mathfrak{F}(a)$ は落ちるから，$\neg \mathfrak{F}(a)$ は $\neg \exists x \mathfrak{F}(x)$ だけに従属し，最後に $\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \supset \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$ は従属する仮定がなくなって独立となるから，それぞれの論理式の前に，従属する仮定を書きならべ → で結ぶと，一番上は $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ の形の式から始まり，一番下には $\to \mathfrak{A}$ の形の式をもつ次のような図形がえられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a)}{\mathfrak{F}(a) \to \exists x \mathfrak{F}(x)} \quad \neg \exists x \mathfrak{F}(x) \to \neg \exists x \mathfrak{F}(x)}{\neg \exists x \mathfrak{F}(x),\ \mathfrak{F}(a) \to}}{\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \to \neg \mathfrak{F}(a)}}{\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \to \forall x \neg \mathfrak{F}(x)}}{\to \neg \exists x \mathfrak{F}(x) \supset \forall x \neg \mathfrak{F}(x)}$$

この図形が sequential calculus における証明図とよばれるものの原型である．NK の証明図を上のように変えるには，NK の各推論規則について，この規則に用いられる各論理式が式を用いてどのように変わるかをしらべておけばよい．$\supset_2$，$\vee_2$ については多少技巧を必要とするが，その他の推論規則については容易である．たとえば推論規則 $\supset_1$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[\mathfrak{A}]}}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \supset_1 1$$

で $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ および $\mathfrak{A}$ に従属しているとすれば，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ に

従属しているから，推論規則 $\supset_1$ を次のように変形すればよい．

$$\frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$$

すでに第3章で述べた多くの体系が sequential calculus において考えられるが，まず NK を sequential に表わした体系 LK を次のように定義する．

定義 1　述語計算 LK は次の 1〜4 で定義される．

1. 記号　NJ と同じ．ただし命題定数は除き，記号 ，→ を付け加える．
   [3·2 節A項参照]
2. 表現　i）項　NJ と同じ［上に同じ］
   ii）論理式　NJ と同じ［上に同じ］
   iii）式　これは以下で定義される
3. 公理　$\mathfrak{D}$ を任意の論理式とするとき，$\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ の形の式だけが公理である
4. 推論規則　これは以下で定義される

さて，式，LK の推論規則および LK の証明図を定義しよう．

定義 2　式 (sequent) とは，$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の形の図形をいう．ただし $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ $(i=1, 2, \cdots;\ m, n=0, 1, 2, \cdots)$ は論理式を表わす．

内容的には「仮定 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ がすべて成り立つとき，$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の少なくとも一つが成り立つ」ことを表わす．$m=0$ のときは上の式は，$\to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ を表わすものとし，$n=0$ のときは上の式は $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to$ を表わすものとする．それぞれ「何らの仮定なしに $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の少なくとも一つは成り立つ」ことおよび「仮定 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ がすべて成り立つとき矛盾がおこる」ことを表わしている．$m=n=0$ のときは上の式は → を表わし，**矛盾する**とよむ．LK では → は導けないよう構成されている．

有限個の論理式の列（論理式が一つもなくてもよい）を $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi$ などのギリシャ大文字で表わすことにすれば，式は一般に $\Gamma \to \Delta$ などと表わすことができる．Γ は $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ を表わしているかまたは空を表わしている．

次に推論規則について述べよう．$S_1, S_2, \cdots, S_n, S$ をそれぞれ式とするとき，

$$\frac{S_1\ S_2 \cdots S_n}{S} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

の形の図形を**推論規則** (inference rule) という．$S_1, \cdots, S_n$ をそれぞれ**上式** (upper sequent)，S を**下式** (lower sequent) という．

内容的には「$S_1, S_2, \cdots, S_n$ が成り立つとき S が成り立つ」ことを表わしている．以下では n は1かまたは2の場合だけがとり扱われる．

定義 3 次の形の図形を LK の推論規則という．

1. 式の構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}\ (\to w) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}\ (w \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}\ (\to c) \qquad \frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}\ (c \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Pi}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Pi}\ (\to e) \qquad \frac{\Gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Pi \to \Delta}{\Gamma, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Pi \to \Delta}\ (e \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

2. 論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}\ (\to \wedge) \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta} \end{array}\right\}\ (\wedge \to)$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{array}\right\}\ (\to \vee) \qquad \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg \mathfrak{A}}\ (\to \neg) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}\ (\neg \to)$$

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\ (\to \supset) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi}\ (\supset \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}\ (\to \forall) \qquad \frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}\ (\forall \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\, \mathfrak{F}(x)}\ (\to \exists) \qquad \frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}\ (\exists \to)$$

ただし（→∀）および（∃→）においては，a はその推論規則の下式に現われてはいけない．a を（→∀）および（∃→）の eigenvariable という．また t は任意の項を表わす．

推論規則の上式と下式で不変の論理式を**パラメーター**(parameter)，そうで

ない論理式については下式に現われるものを**主論理式**(principal formula)，それに対応して上に現われる部分論理式を**副論理式** (side formula) という．たとえば，$(w\to)$，$(\to w)$ では主論理式は $\mathfrak{A}$ で副論理式はなく，$(c\to)$，$(\to c)$ では主論理式は $\mathfrak{A}$，副論理式は $\mathfrak{A}$ が2つある．$(\to\wedge)$ では $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ は主論理式，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ はともに副論理式である．(cut) では主論理式はない．Γ, Δ, Π などに含まれる各論理式はいずれもパラメーターである．

定義 4　次の条件 1), 2) を満たすような有限個の式からつくられる図形を LK の**証明図** (proof-figure) という．

1)　公理 $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ はそれ自身証明図である．そしてこの証明図の**始式** (beginning sequent) および**終式** (end sequent) はともに $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ 自身である．

2)　式 S_i を終式とする証明図を $P(S_i)$ とするとき $\dfrac{S_1\cdots S_n}{S}$ が推論規則ならば $\dfrac{P(S_1)\cdots P(S_n)}{S}$ は証明図である．そしてこの証明図の始式は $P(S_1)$, …, $P(S_n)$ の始式であり，この証明図の終式は式 S である．

$\Gamma\to\Theta$ が終式であるような証明図があるとき，$\Gamma\to\Theta$ は**証明可能** (provable) であるという．

LK の証明図の二，三の例をあげよう．

1.　$\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B}$　(3.19)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\,(\to\vee)}{\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}),\mathfrak{A}\to}\,(\neg\to)}{\mathfrak{A},\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to}\,(e\to)}{\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A}}\,(\to\neg)\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\,(\to\vee)}{\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}),\mathfrak{B}\to}\,(\neg\to)}{\mathfrak{B},\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to}\,(e\to)}{\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{B}}\,(\to\neg)}{\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B}}\,(\to\wedge)$$

2.　$\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$　(3.28)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\to\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}}\,(\to\neg)}{\to\mathfrak{A},\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}\,(\to\vee)}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}}\,(\to e)}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}\,(\to\vee)}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}\,(\to c)$$

上の2の証明に用いた推論を少し一般化しておくと，LK では次の推論が成

り立つ.

3.

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$$

ただし ══ は適当な LK の推論規則を有限回用いていることを示す.

証明は次のとおりである.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\to\vee)}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \mathfrak{A}}\,(\to e)}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\to\vee)}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\to c)$$

同様に

$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$$

も LK で成り立つ.

4. $\to (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ (3. 33)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}\,(\supset\to)}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}\,(e\to)}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \neg \mathfrak{A}}\,(\to\neg)}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}\,(\to e)}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\text{3 の推論を用いる})$$

5. $\to \exists x \neg \mathfrak{F}(x) \supset \neg \forall x\, \mathfrak{F}(x)$ (3. 43)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a)}{\forall x\, \mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(a)}\,(\forall\to)}{\neg \mathfrak{F}(a), \forall x\, \mathfrak{F}(x) \to}\,(\neg\to)}{\exists x \neg \mathfrak{F}(x), \forall x\, \mathfrak{F}(x) \to}\,(\exists\to)\quad (a\text{ は下式に現われない})}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \exists x \neg \mathfrak{F}(x) \to}\,(e\to)}{\exists x \neg \mathfrak{F}(x) \to \neg \forall x\, \mathfrak{F}(x)}\,(\to\neg)}{\to \exists x \neg \mathfrak{F}(x) \supset \neg \forall x\, \mathfrak{F}(x)}\,(\to\supset)$$

注 $(\to\forall)$ および $(\exists\to)$ では a は下式に現われないという条件が必要である. 次の二つの例はいずれも証明図ではない.

$(\to\forall)$ $\quad \dfrac{a=b \to a=b}{a=b \to \forall x(x=b)}$ $\qquad$ $(\exists\to)$ $\quad \dfrac{a=b \to a=b}{\exists x(x=b) \to a=b}$

ここで糸という概念について述べておく. 一つの証明図が与えられたとき, 一つの始式から始まり, その下式, 下式とたどれば終式に達する. この式の系

列を糸 (string) という．式が他の式の上（または下）にあるというときには，いつもこの二つの式が同じ糸に属していて，その中で上（または下）になっているときをいう．上の例で 1 と 4 の場合は証明図は二つの糸からできている．

最後に，$\Gamma\rightarrow$ は内容的には「Γ に属する論理式がすべて成り立てば矛盾がおこることを表わしている」といったが，それは次の理由による．

いま $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ と $\Gamma\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ がともに証明可能とすれば

$$\cfrac{\Gamma\rightarrow\neg\mathfrak{A} \qquad \cfrac{\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow}\ (\neg\rightarrow)}{\cfrac{\Gamma,\ \Gamma\rightarrow}{\Gamma\rightarrow}\ (e\rightarrow)\ \text{および}\ (c\rightarrow)}\ (\text{cut})$$

より $\Gamma\rightarrow$ が導かれ，逆に $\Gamma\rightarrow$ が証明可能ならば $(\rightarrow w)$ を用いて $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ も $\Gamma\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ も導くことができる．この意味で $\Gamma\rightarrow$ を「Γ は矛盾する」と読む．

B．LK のおもな性質

a．推論規則の双対性　$\mathfrak{A}$ を論理記号 $\supset$ を含まない論理式とするとき，$\mathfrak{A}$ に双対な論理式（すなわち $\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号 $\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$ をそれぞれ $\vee$，$\wedge$，$\exists$，$\forall$ でおきかえてできた論理式）を $\mathfrak{A}'$ で表わすことにする．さて $\mathfrak{A}_i$，$\mathfrak{B}_j$ がいずれも記号 $\supset$ を含まないとき，式 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m\rightarrow\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ に対し，新しい式 $\mathfrak{B}'_n,\cdots,\mathfrak{B}'_1\rightarrow\mathfrak{A}'_m,\cdots,\mathfrak{A}'_1$ をもとの式に**双対な式**という．

注　$\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m\rightarrow\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ は内容的に $\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m\supset\mathfrak{B}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n$ を表わしていたが，この論理式に双対な論理式は 1·1 節 C 項の定義より $(\mathfrak{B}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n)'\supset(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m)'$ すなわち $\mathfrak{B}_n'\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_1'\supset\mathfrak{A}_m'\vee\cdots\vee\mathfrak{A}_1'$ である．これは式 $\mathfrak{B}_n',\cdots,\mathfrak{B}_1'\rightarrow\mathfrak{A}_m',\cdots,\mathfrak{A}_1'$ を内容的に表わした論理式にほかならない．

LK の各推論規則（ただし $\supset$ に関する推論規則は除いて）に対し，それの上式および下式をそれぞれ双対な式でおきかえてできる図形はまた LK の推論である．このことは定義 3 の各推論について順次調べれば明らかであろう．

したがって LK で証明可能な式 $\Gamma\rightarrow\Theta$ の LK 証明図にあらわれるすべての式を，これに双対な式でおきかえてえられる図形は，$\Gamma\rightarrow\Theta$ に双対な式に対する LK 証明図となることがわかる．すなわち次の定理がえられる．

定理 1　式 $\Gamma\rightarrow\Theta$ が LK で証明可能ならば，$\Gamma\rightarrow\Theta$ に双対な式もまた LK で証明可能である．ただし Γ，Θ は論理記号 $\supset$ を含まないものとする．

例　$\to A\vee\neg A$ は LK で証明可能である（4·1 節）．したがって これに 双対な式 $\neg A\wedge A\to$ もまた LK で証明可能であり，証明図は次のようになる（$\to A\vee\neg A$ の証明図も比較のためあげておく）

$$\begin{array}{cl} A\to A & \\ \hline \neg A, A\to & (\neg\to) \\ \hline \neg A\wedge A, A\to & (\wedge\to) \\ \hline A, \neg A\wedge A\to & (e\to) \\ \hline \neg A\wedge A, \neg A\wedge A\to & (\wedge\to) \\ \hline \neg A\wedge A\to & (c\to) \end{array} \qquad \begin{array}{cl} A\to A & \\ \hline \to A, \neg A & (\to\neg) \\ \hline \to A, A\vee\neg A & (\to\vee) \\ \hline \to A\vee\neg A, A & (\to e) \\ \hline \to A\vee\neg A, A\vee\neg A & (\to\vee) \\ \hline \to A\vee\neg A & (\to c) \end{array}$$

定理 1 で，Γ，Θ は論理記号 $\supset$ を含まないという制限は本質的なことではない．なぜなら，LK では $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ を $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ で定義し，$\supset$ についての推論規則をとり去ることができるからである．このことを明らかにするには（$\to\supset$）および（$\supset\to$）に対応する次の二つの図形

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A}, \Gamma\to\Delta, \mathfrak{B} \\ \hline\hline \Gamma\to\Delta, \neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \Gamma\to\Delta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Sigma\to\Pi \\ \hline\hline \neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma\to\Delta, \Pi \end{array}$$

が LK で許される推論であることを示せばよいが，次のようにして導くことができる．

$$\begin{array}{cl} \mathfrak{A}, \Gamma\to\Delta, \mathfrak{B} & \\ \hline \Gamma\to\Delta, \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{A} & (\to\neg) \\ \hline \Gamma\to\Delta, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{B} & (\to e) \\ \hline\hline \Gamma\to\Delta, \neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} & (\text{3 の推論による}) \end{array}$$

および

$$\dfrac{\begin{array}{cl} \Gamma\to\Delta, \mathfrak{A} & \\ \hline \neg\mathfrak{A}, \Gamma\to\Delta & (\neg\to) \\ \hline\hline \neg\mathfrak{A}, \Gamma, \Sigma\to\Delta, \Pi & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{B}, \Sigma\to\Pi \\ \hline\hline \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma\to\Delta, \Pi \end{array}}{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma\to\Delta, \Pi}\ (\vee\to)$$

（══は構造に関する推論規則を何回か用いる）

b．推論規則の従属性　　LK の推論規則は互いに独立ではない．すなわち推論規則のうちのあるものは他の推論規則を用いて導くことができる．

1.　前項 a では $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ を $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ で定義することにより，$\supset$ に関する二つの推論規則は他の推論規則を用いて導くことができた．この考え方を進めて行けば，たとえば $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$，$\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ をそれぞれ $\neg(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B})$，$\neg(\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B})$ および $\neg\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ で定義することにより，LK の推論規則としては

∧, ¬, ∀ に関するものだけに限定することができる．このようにできるだけ少ない論理記号とそれに対する推論規則をえらんで LK を簡単にすることはこのほかにも可能である．しかし LK 以外の体系たとえば後に述べる LJ ではこのような簡単化は不可能である．

2. 推論規則は，これと同値な式でおきかえることも可能である．たとえば，(→∧) と式 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ は次のような意味で同値である．すなわち (→∧) を仮定すれば，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ は LK で証明可能であり，逆に $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ が証明可能ならば (→∧) は LK で許される推論である．証明は次のとおり．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}\ (\to\wedge)$$

逆は，

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{B} \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}\ (\mathrm{cut})}{\overline{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}}}{\dfrac{\Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}{\overline{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}}}\ (\mathrm{cut})$$

これと同じようにして，以下に述べる各推論は，これらの右側に書かれた同値な式でおきかえることができる．

(→∧)	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$	(これについては上に述べた)
(∧→)	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$
(→∨)	$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$	$\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$
(∨→)	$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$	
(→¬)	$\to \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A}$	
(¬→)	$\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to$	
(→⊃)	$\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$	
(∀→)	$\forall x\, \mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)$	
(→∃)	$\mathfrak{F}(a) \to \exists x\, \mathfrak{F}(x)$	

上にあげた式をすべて公理としてみとめることにすれば，推論規則は構造に関する推論規則のほか，(→⊃)，(→∀)，(∃→) だけで十分であることがわかり，LK は Hilbert 流の公理化に近ずくことがわかる．

3. LK および LJ では推論規則 cut はそれ以外の推論規則を用いて導くことができる．すなわち証明図が cut を含んでいるとき，この証明図から cut を追い出すことができる．この結果は Gentzen によってみいだされ，数理論理学における最も美しい結果の一つとされている．これはまえに述べた 1 2のような推論を少なくする試みとは本質的に異なるものであり，基本定理という名でよばれている．これについては次節でくわしく述べることにする．

c．部分論理式 定義にしたがって論理式$\mathfrak{A}$を構成して行くとき，その途中に現われる論理式をすべて$\mathfrak{A}$の部分論理式という．$\mathfrak{A}$自身も$\mathfrak{A}$の部分論理式である（1.1 節参照）．たとえば $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の部分論理式は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の部分論理式および $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ であり，$A\vee\neg A$ の部分論理式は $A\vee\neg A$, $\neg A$ およびAである．$\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ の部分論理式は $\mathfrak{F}(a)$ の部分論理式（$\mathfrak{F}(a)$ 自身も含めて）および $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ である．したがって，$\forall$, $\exists$ を含まない論理式が与えられれば，その部分論理式は確定し有限個である．以下命題論理の範囲について部分論理式を考えよう．

さて LK の推論規則では，cut を除外すれば，上式に現われる論理式はすべて下式のどれかの論理式の部分論理式になっていることがわかる．直観的にいえば推論規則の上式に現われる論理式は下式に現われる論理式より長くなることはない．このことは cut 以外の推論規則を順次調べてみれば容易に確かめられる．したがって次のようにまとめることができる．

「LK の証明図が cut を含まないときは，この証明図に現われる論理式はすべてこの証明図の終式に現われる論理式の部分論理式になっている」

この性質を**部分論理式についての性質**（Teilformeln-Eigenschaft）という．

この性質から，ある証明図が cut を含まないときは，その証明図に現われる論理式は下に行くほど長くなり終式が一番長くなっていることがわかる．また証明図に現われる論理式はすべて終式に現われる論理式の部分論理式になっているから，終式に部分論理式として含まれていないような論理式は決して証明図に現われない．この意味で cut を含まない証明図は**まわり道**のない証明であるといえよう．

次の節では $\Gamma\rightarrow\Theta$ の証明図が任意に与えられたとき，$\Gamma\rightarrow\Theta$ の cut を含まない証明図がつくれることを示しこれの応用を述べるが，このとき部分論理

式についての性質が本質的に用いられる.

C．述語計算 LJ

a．LJ の定義　述語計算 LK の定義において「式の右辺はたかだか一つの論理式に限る」と制限をつけた体系を **LJ** という．直観主義論理 (intuitionistic logic) の形式化である．LJ における式の右辺は空かまたはただ一つの論理式からなっている．LJ は LK の特別の場合であるから，LJ で証明可能な式は LK で証明可能であるが逆は必ずしも成り立たない．

LJ の推論規則は LK の推論規則で各式の右辺をたかだか一つの論理式と制限すればよいが，まとめて下にあげておく．

LJ の推論規則

1.　式の構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}\ (\rightarrow w) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \Theta}\ (w \rightarrow)$$

$(\rightarrow c)$　なし　$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \Theta}\ (c \rightarrow)$$

$(\rightarrow e)$　なし　$$\frac{\Gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Pi \rightarrow \Theta}{\Gamma, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Pi \rightarrow \Theta}\ (e \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Gamma,\ \Sigma \rightarrow \Theta}\ (\mathrm{cut})$$

2.　論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}\ (\rightarrow \wedge) \qquad \left.\begin{array}{c} \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B},\ \Gamma \rightarrow \Theta} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{B},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B},\ \Gamma \rightarrow \Theta} \end{array}\right\}\ (\wedge \rightarrow)$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{array}\right\}\ (\rightarrow \vee) \qquad \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \Theta \qquad \mathfrak{B},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \Gamma \rightarrow \Theta}\ (\vee \rightarrow)$$

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}}\ (\rightarrow \neg) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow}\ (\neg \rightarrow)$$

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\ (\rightarrow \supset) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Sigma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Theta}\ (\supset \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \forall x\, \mathfrak{F}(x)}\ (\to\forall) \qquad \frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}\ (\forall\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \exists x\, \mathfrak{F}(x)}\ (\to\exists) \qquad \frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Theta}{\exists x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}\ (\exists\to)$$

ただしΘは空またはただ一つの論理式を表わすものとし，$(\to\forall)$および$(\exists\to)$においては，aはその推論規則の下式に現われないものとする．

b．LJ の性質

1. 前項Bで述べたLKの性質のうち，「部分論理式についての性質」はLJについても成り立つ．しかしLJの任意の式に対し，これに双対な式はLJの式になるとは限らないから，推論規則の双対性は成り立たない．

さてLJはNJをsequentialに表わしたものであるが，次の定理が成り立つ（証明は省略する)．

定理 2 $\mathfrak{A}$が NJ (NK) で証明可能 $\Longleftrightarrow \to\mathfrak{A}$ が LJ (LK) で証明可能．

したがって，第3章で述べた (3.28)～(3.36) などの論理式のまえに → をつけた式はいずれも LK で証明可能であるが，LJ では一般には証明可能でない．

このようにLKで証明可能であるが，LJでは一般に証明可能でない式の例をあげておこう．

$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$

$\to \neg\neg\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$ （したがって $\neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ もそうである）

$\neg\mathfrak{B} \supset \neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

$\neg(\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$

$\neg(\neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

$\neg\exists x \neg\mathfrak{F}(x) \to \forall x\, \mathfrak{F}(x)$

$\neg\forall x \neg\mathfrak{F}(x) \to \exists x\, \mathfrak{F}(x)$

$\neg\forall x\, \mathfrak{F}(x) \to \exists x \neg\mathfrak{F}(x)$

4·1 節にあげたLKの証明図の例のうち1および5はLJにおいても成り立つ（証明図をみれば明らか）から5より $\exists x \neg\mathfrak{F}(x) \to \neg\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ は LJ でも成り立つ．しかし2，3，4などは LJ では成り立たない．しかし，2を弱め

た式 $\rightarrow \neg\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})$ は次のようにして LJ で証明可能である.

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A} \\ \hline
\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}),\ \mathfrak{A}\rightarrow \\ \hline
\mathfrak{A},\ \neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow \\ \hline
\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}),\ \neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow \\ \hline
\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow \\ \hline
\rightarrow\neg\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})
\end{array}$$

最後に一つの注意を与えておこう.

LJ では　$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ と $\rightarrow\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ は同等であり

$\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rightarrow$ と $\mathfrak{B}\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ は同等である.

なぜなら

$$\dfrac{\rightarrow\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}} \qquad \text{および} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}}{\rightarrow\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}$$

より第1の関係が導かれ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\rightarrow}}{\mathfrak{A}\rightarrow\neg\neg\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}\rightarrow\neg\mathfrak{A}}{\neg\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\rightarrow}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\rightarrow} \qquad \text{および} \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\rightarrow}{\mathfrak{B}\rightarrow\neg\mathfrak{A}}$$

より第2の関係が導かれる.

LJ では, $\mathfrak{A}\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ と $\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ は同等であり, また, $\neg\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}$ と $\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ は同等であることが証明できる.

注　H_p, 命題計算 NK, 命題計算 LK などはすべて同値となるのでこれらを一般に古典命題計算 PC と称する. 述語計算 NK, LK などと同値な体系を古典述語計算という.

また NJ, LJ などと同値な体系を直観主義命題計算, 直観主義述語計算などという.

4・2 基　本　定　理

ここでは基本定理の証明と, この定理から導かれる二つの大切な応用について述べる. **基本定理** (Hauptsatz, Cut Elimination Theorem) とは次のものである.

定理 3 (Gentzen の基本定理)　$\Gamma \to \Delta$ を終式とする LK 証明図に対し，これと同じ終式をもち，かつ cut を含まないような証明図をつくることができる．このことは LJ に対してもまた成り立つ．

証明を行なうまえに，LK および LJ に対して二，三の準備を与えておく．

A．準　備

1. **mixture の導入と補助定理**　まず，cut を拡張し，次の推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Theta \qquad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

を導入する．ここに，Θ および Δ には，たとえば $\mathfrak{M}$ という形の論理式が少なくも一つ含まれているとし，Θ^*, Δ^* はそれぞれ Θ, Δ から $\mathfrak{M}$ という形の論理式をすべてとり去ってできた論理式の列を表わしている．この推論規則を **mixture** (略して mix) といい，$\mathfrak{M}$ を **m-論理式** (mix-formula) という．m-論理式 $\mathfrak{M}$ を推論規則の右端に上のように書きこむ．

mixture の例

$$\frac{A \to B, \neg C \qquad \neg C, B, \neg C, D \to \neg D}{A, B, D \to B, \neg D}\ (\neg C)$$

m-論理式は $\neg C$ である．

cut は mix を用いて次のように表わすことができ，

$$\cfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M}, \Sigma \to \Pi}{\cfrac{\Gamma, \Sigma^* \to \Delta^*, \Pi}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi}}\ (\mathfrak{M})$$

また逆に mix は cut を用いて次のように表わされる．

$$\frac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta^*, \mathfrak{M}} \qquad \dfrac{\Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda}}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\text{cut})$$

(＝＝はもし必要なら $(\to e)$, $(e \to)$, $(\to w)$, $(w \to)$ を何回か用いることを表わす) したがって，cut と mix は上の意味で同値である．この節では，とり扱う証明図の中に cut があればこれをすべて上の意味で mix におきかえ cut は全く含まれないようにあらかじめ変形したものを考えることにする．したがって上の基本定理を示すには，mix を全く含まない証明図がつくれることを証明すればよいが，それにはさらに次の補助定理

補助定理 4 一番下にある推論規則が mix で，その他には mix を全く含まないような証明図は，同じ終式をもち mix を全く含まないような証明図に変形することができる．

を証明すれば十分である．

なぜなら，一般に有限個の mix を含む（cut のない）証明図が与えられたとき，最も上にある mix の一つに目をつけ，この mix の下式が終式となるような証明図を考えると，補助定理よりこの mix はとり去ることができるから，残りの部分はもとのままにしておくことにより，全体の証明図の mix の個数は1つ少なくなり，したがって帰納法の仮定より基本定理が成り立つことになる．厳密な証明は grade と rank についての二重帰納法を用いる．grade および rank の定義は次のように与えられる．

2. **grade および rank** 以下一番下にだけ mix がありこのほかには mix を含まないような証明図を扱う．**証明図の grade** とはこの証明図の一番下にある mix の m-論理式の grade（すなわち m-論理式に含まれる論理記号の数）のことをいう．grade を γ で表わす．次に，**証明図の左 rank** とは mix の左上式から糸にそって上方へ式をたどるとき，ひきつづき右辺に m-論理式 $\mathfrak{M}$ が現われているような式の個数（この場合 mix の左上式も勘定に入れて）の最大数をいう．同じようにして**右 rank** とは mix の右上式から糸にそって上方へたどるとき，左辺に m-論理式を含むような式の個数の最大数をいう．左 rank，右 rank をそれぞれ ρ_l，ρ_r とかき $\rho=\rho_l+\rho_r$ を**証明図の rank** という．$\rho_l\geqq 1$，$\rho_r\geqq 1$ だから $\rho\geqq 2$ である．

3. **自由変数のおきかえ** 補助定理の証明を行なうために必要な措置として，自由変数のおきかえについて述べる．一般に自由変数 a を含んだ式を $\Gamma(a)\to\Delta(a)$ と書くことにし，a をすべて自由変数 b および項 t でおきかえた式をそれぞれ $\Gamma(b)\to\Delta(b)$，$\Gamma(t)\to\Delta(t)$ と書くことにする．

i）「$\Gamma(a)\to\Delta(a)$ の証明図 P に現われる自由変数 a をすべて，P に現われない自由変数 b でおきかえてできる図形を P' とすれば，P' は式 $\Gamma(b)\to\Delta(b)$ の証明図である」．

証明は $\Gamma(a)\to\Delta(\mathrm{a})$ の証明図の長さ l に関する帰納法による．$l=1$ のとき，P は始式 $\mathfrak{D}(a)\to\mathfrak{D}(a)$ だけからなっており，P' は a を b でおきかえ $\mathfrak{D}(b)\to$

$\mathfrak{D}(b)$ となり証明できた．次に $l>1$ のとき一番下に現われる推論規則で分類すればよい．たとえば最後の推論規則が（$\rightarrow\forall$）のとき

a が（$\rightarrow\forall$）の eigenvariable のとき（このとき a は終式に入っていないが）証明図の一番下の部分は

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta,\ \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \rightarrow \Theta,\ \forall x\, \mathfrak{F}(x)}\ (\rightarrow\forall)$$

となり，a が $\Gamma, \Theta, \mathfrak{F}(x)$ に入らないことより，$\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(a)$ の証明図中の a をすべて b でおきかえれば，帰納法の仮定より $\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(b)$ が証明可能である．したがって（$\rightarrow\forall$）を用いて $\Gamma \rightarrow \Theta,\ \forall x \mathfrak{F}(x)$ を導くことができる．

a が（$\rightarrow\forall$）の eigenvariable でないとき，証明図の一番下の部分は c を eigenvariable として

$$\frac{\Gamma(a) \rightarrow \Theta(a),\ \mathfrak{F}(a,c)}{\Gamma(a) \rightarrow \Theta(a),\ \forall x\, \mathfrak{F}(a,x)}\ (\rightarrow\forall)$$

となり，上式 $\Gamma(a) \rightarrow \Theta(a), \mathfrak{F}(a,c)$ の証明図中の a をすべて b でおきかえると帰納法の仮定より，$\Gamma(b) \rightarrow \Theta(b), \mathfrak{F}(b,c)$ が証明可能となる．仮定から b と c は異なるから（$\rightarrow\forall$）を用いて $\Gamma(b) \rightarrow \Theta(b), \forall x\, \mathfrak{F}(b,x)$ をうる．

他の推論規則についても同様である． *qed*

ii）「$\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ の証明図 P に現われる自由変数 a をすべて，項 t でおきかえてできる図形は $\Gamma(t) \rightarrow \Delta(t)$ の証明図である．ただし P の中に現われる eigenvariable は a でもなくまた t にも含まれないものとする」．

証明は i）と同じようにしてできるから省略するが，ii）はただし書きがなくても成り立つ．すなわち

iii）「$\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ の証明図 P にあらわれる自由変数 a をすべて，項 t でおきかえてできる図形は $\Gamma(t) \rightarrow \Delta(t)$ の証明図である．したがって $\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ が証明可能ならば $\Gamma(t) \rightarrow \Delta(t)$ も証明可能である」．

なぜなら $\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ の証明図 P に eigenvariable として用いられている自由変数 c が a に等しいかまたは t に含まれていると仮定する．eigenvariable

が c であるような推論規則が

$$\frac{\Sigma \to \Pi,\ \mathfrak{F}(c)}{\Sigma \to \Pi,\ \forall x\, \mathfrak{F}(x)} \ (\to \forall)$$

であるとし $\Sigma \to \Pi,\ \mathfrak{F}(c)$ の証明図中 c をすべて新しい自由変数 b でおきかえる．ただし b は a に等しくはないし t にも入っていないし 証明図 P に全く現われていないものをえらんでくる．証明図 P の残りの部分はもとのままにしておけば新しい証明図 P' をうる．a に等しいかまたは t に含まれるようなすべての eigenvariable に対して上の操作を有限回行なうことによって，ii）のただし書きをみたし，終式が $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ であるような証明図がえられるから，この証明図に対しii）を行なえばよい．　*qed*

B．基本定理の証明

一番下にある推論規則が mix で，その他には mix を全く含まないような証明図が与えられたとする．したがって，ここでとり扱う証明図は

$$\frac{\begin{matrix} \ddots\ \vdots\ \iddots \\ S_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \ddots\ \vdots\ \iddots \\ S_2 \end{matrix}}{S} \ (\mathfrak{M})$$

ただし $S_1 : \Gamma \to \Theta$

$S_2 : \Delta \to \Lambda$

$S : \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda$ である

の形であると仮定する．補助定理の証明は，証明図の grade γ と rank ρ による二重帰納法を用いる．すなわち $\rho \geqq 2$ であるから，まず $\rho = 2$ で任意の grade γ のときを証明する．このときは grade が γ より小さいとき任意の rank に対し補助定理は成り立っていると仮定するわけである．次に $\rho > 2$ のときを行なう．この場合は grade が同じで rank が ρ より小さいとき補助定理が成り立っていると仮定することになる．

1.　$\rho = 2$ のとき（したがって $\rho_l = \rho_r = 1$）

1.1　S_1 が始式のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\frac{\mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \qquad \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M},\ \Delta^* \to \Lambda} \ (\mathfrak{M})$$

これを次のように変形する．

$$\begin{array}{cl} \Delta \to \Lambda & \\ \hline\hline \mathfrak{M}, \cdots, \mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda & (e \to) \text{ を何度か用いる} \\ \hline\hline \mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda & (c \to) \text{ を必要ならば何度か用いる} \end{array}$$

変形後には $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ は消去されまた $\Delta \to \Lambda$ の上方 $\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda$ の下方にはもとの証明図の対応する部分を書く．

Δ が $\mathfrak{M}$ を1つしか含まなければ $\mathfrak{M}, \cdots, \mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda$ と $\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda$ は同じものになるからどちらか一方を消せばよい．今後このような措置は必要あれば行なうことにする．

この変形によって，同一の終式 $\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda$ の mix のない証明図が得られた．

1.2　S_2 が始式のとき　1.1 の場合と双対的（4·1 節B項参照）にとり扱えばよい．

1.3　S_1 がある推論規則 I_1 の下式になっており，しかも I_1 が式の構造に関する推論規則であるとき，これらの規則の中から $\rho_l=1$ をみたすものをさがせば I_1 は $(\to w)$ だけであり，このとき証明図の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta_0}{\Gamma \to \Theta_0, \mathfrak{M}} \qquad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta_0, \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

（$\rho_l=1$ より Θ_0 は $\mathfrak{M}$ を含んでいないから mix の下式の Θ_0 には * をつけなくてよい）

これを次のように変形する．

$$\begin{array}{ll} \Gamma \to \Theta_0 & \\ \hline\hline \Delta^*, \Gamma \to \Theta_0, \Lambda & (\to w),\ (w\to) \text{ を何度か用いる} \\ \hline\hline \Gamma, \Delta^* \to \Theta_0, \Lambda & (e\to) \text{ を何度か用いる} \end{array}$$

これとともに $\Delta \to \Lambda$ の上の証明図の部分を消去する．この変形によって mix を含まない証明図がえられた．

1.4　S_2 がある推論規則 I_2 の下式になっており，しかも I_2 が式の構造に関する推論規則であるとき，この場合も 1.3 と双対的にとり扱えばよい．

1.5　S_1，S_2 がそれぞれある推論規則 I_1 および I_2 の下式になっており，しかも I_1，I_2 がともに論理記号に関する推論規則であるとき，これらの規則の中から $\rho_l=\rho_r=1$ をみたすものをさがせば，m-論理式 $\mathfrak{M}$ は推論 I_1 および I_2 の主論理式でなければならない．そこで $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\wedge, \vee, \forall, \exists, \neg, \supset$ であるにしたがって次の6つの場合にわかれる．

①　$\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\wedge$ のとき　証明図の mix の部分は次の形をして

いる.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{A}\qquad\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{B}}{\Gamma\to\Theta_0,\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\qquad\cfrac{\mathfrak{A},\ \varDelta_0\to\varLambda}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \varDelta_0\to\varLambda}}{\Gamma,\varDelta_0\to\Theta_0,\ \varLambda}\ (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$$

ここで $\rho_l=\rho_r=1$ より $\Theta_0,\ \varDelta_0$ は m-論理式 $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ を含まない. さてこれを次のように変形する.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{A}\qquad\mathfrak{A},\varDelta_0\to\varLambda}{\Gamma,\ \varDelta_0{}^*\to\Theta_0{}^*,\ \varLambda}\ (\mathfrak{A})}{\Gamma,\ \varDelta_0\to\Theta_0,\ \varLambda}\ (\to w)\ (w\to)\ (\to e)\ (e\to)\ \text{を何度か用いる}$$

ここで $\varDelta_0{}^*$ は $\varDelta_0$ から $\mathfrak{A}$ を取り除いたものを表わす. この変形によって $\Gamma,\varDelta_0{}^*\to\Theta_0{}^*,\ \varLambda$ を終式とする証明図の grade は ($\mathfrak{A}$ の grade に等しく) もとの grade ($\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の grade) より小さく, したがって帰納法の仮定により $\mathfrak{A}$ を m-論理式とする新しい mix は取り去ることができる.

② $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\vee$ のとき　この場合は ① と双対的にとり扱えばよい.

③ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\forall$ のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta_0,\ \mathfrak{F}(a)}{\Gamma\to\Theta_0,\ \forall x\ \mathfrak{F}(x)}\qquad\cfrac{\mathfrak{F}(t),\ \varDelta_0\to\varLambda}{\forall x\,\mathfrak{F}(x),\ \varDelta_0\to\varLambda}}{\Gamma,\ \varDelta_0\to\Theta_0,\ \varLambda}\ (\forall x\ \mathfrak{F}(x))$$

$\rho_l=\rho_r=1$ より $\varDelta_0,\ \Theta_0$ は $\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ を含んでいない.

これを次のように変形する. まず $\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{F}(a)$ を終式とする証明図に目をつけ, この中で自由変数 a のあらわれてくるところをすべて項 t でおきかえる. 自由変数のおきかえ iii) により $\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{F}(t)$ の証明図 (mix を含まない) がえられる.

したがって $\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{F}(t)$ の証明図がえられたから, これを用いて次のように変形する.

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta_0,\mathfrak{F}(t)\qquad\mathfrak{F}(t),\varDelta_0\to\varLambda}{\Gamma,\ \varDelta_0{}^*\to\Theta_0{}^*,\ \varLambda}\ (\mathfrak{F}(t))}{\Gamma,\ \varDelta_0\to\Theta_0,\ \varLambda}\ (\to w)\ (w\to)\ (\to e)\ (e\to)\ \text{を何度か用いる}$$

ここで $\varDelta_0{}^*,\ \Theta_0{}^*$ は $\varDelta_0,\ \Theta_0$ より $\mathfrak{F}(t)$ を取り除いた論理式の列を表わす. この変形によって $\Gamma,\varDelta_0{}^*\to\Theta_0{}^*,\ \varLambda$ を終式とする証明図の grade はもと

の grade より小さく，したがって帰納法の仮定より，$\mathfrak{F}(t)$ を m-論理式とする新しい mix は取り去ることができる．

④ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\exists$ のとき　この場合は ③ と双対的にとり扱えばよい．

⑤ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\neg$ のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta_0}{\Gamma \to \Theta_0, \neg\mathfrak{A}} \quad \dfrac{\Delta_0 \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Delta_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Delta_0 \to \Theta_0, \Lambda}\ (\neg\mathfrak{A})$$

これを次のように変える．

$$\dfrac{\dfrac{\Delta_0 \to \Lambda, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta_0}{\Delta_0, \Gamma^* \to \Lambda^*, \Theta_0}\ (\mathfrak{A})}{\Gamma, \Delta_0 \to \Theta_0, \Lambda}\ (\to w)\ (w\to)\ (\to e)\ (e\to) \text{ を何度か用いる}$$

m-論理式の grade は1つ下がったから，帰納法の仮定により mix を取り去ることができる．

⑥ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\supset$ のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta_0, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta_0, \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}} \quad \dfrac{\Sigma_0 \to \Pi, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta_0 \to \Lambda}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}, \Sigma_0, \Delta_0 \to \Pi, \Lambda}}{\Gamma, \Sigma_0, \Delta_0 \to \Theta_0, \Pi, \Lambda}\ (\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$$

これを次のように変える．

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_0 \to \Pi, \mathfrak{A} \quad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta_0, \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}, \Delta_0 \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta_0^* \to \Theta_0^*, \Lambda}\ (\mathfrak{B})}{\Sigma_0, \Gamma^*, \Delta_0^{**} \to \Pi^*, \Theta_0^*, \Lambda}\ (\mathfrak{A})}{\Gamma, \Sigma_0, \Delta_0 \to \Theta_0, \Pi, \Lambda}\ (\to w)\ (w\to)\ (\to e)\ (e\to) \text{ を何度か用いる}$$

もちろん Δ_0^*, Θ_0^* は Δ_0, Θ_0 から $\mathfrak{B}$ という形の論理式を除いたものを，また Γ^*, Δ_0^{**}, Π^* は Γ, Δ_0^*, Π から $\mathfrak{A}$ という形の論理式を除いたものを表わしている．

$\mathfrak{B}$ を m-論理式とする mix は m-論理式の grade が下ったから帰納法の仮定によりとり去ることができ，つづいて $\mathfrak{A}$ を m-論理式とする mix も同様の理由でとり去ることができる．

2. $\rho>2$ のとき　次の2つの場合にわける．すなわち $\rho_r>1$ の場合と

$\rho_r=1$ したがって $\rho_l>1$ の場合である．第2の場合は第1の場合と双対的に取り扱うことができるから，本質的なのは $\rho_r>1$ のときである．

2.1 $\rho_r>1$ のとき mix の右上式 S_2 がある推論規則 I_2 の下式になっているとし，I_2 の上式および下式の左辺には少なくも1つ，m-論理式 $\mathfrak{M}$ が現われていると仮定することができる．$\rho=2$ の場合には証明図の grade を下げるように変形し，そのためはじめ，式 S_1 と S_2 とで mix を行なっていたのを，S_1 のすぐ上の式と S_2 のすぐ上の式とで mix を行なうように変形したのであったが，$\rho_r>1$ の場合の変形は grade が同じで rank が下がるように行なう．そのために，S_2 のすぐ上の式と S_1 とで mix を行なうように変形するのが根本的な考え方である．もちろん特別な場合にはもっと簡単にとり扱えることもある．

2.1.1 S_1 の左辺が，m-論理式 $\mathfrak{M}$ を含んでいるとき このときは証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Theta \qquad \Delta\rightarrow\Lambda}{\Gamma,\ \Delta^*\rightarrow\Theta^*,\ \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

$\mathfrak{M}$ は Γ, Θ, Δ に含まれている．

これを次のように変形する．

$$\dfrac{\dfrac{\Delta\rightarrow\Lambda}{\mathfrak{M},\ \Delta^*\rightarrow\Lambda}\ (e\rightarrow),\ (c\rightarrow)\ \text{を何度か用いる}}{\Gamma,\ \Delta^*\rightarrow\Theta^*,\ \Lambda}\ (\rightarrow w)\ (w\rightarrow)\ (\rightarrow e)\ (e\rightarrow)\ \text{を何度か用いる}$$

2.1.2 I_2 が式の構造に関する推論規則であるか，または論理記号に関する推論規則で，I_2 の主論理式が S_2 の左辺の $\mathfrak{M}$ でないとき このとき証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Theta \qquad \dfrac{\Sigma\rightarrow\Pi}{\Delta\rightarrow\Lambda}\ I_2}{\Gamma,\ \Delta^*\rightarrow\Theta^*,\ \Lambda}\ (\mathfrak{M})$$

これを次のように変形する

$$\frac{\Gamma\rightarrow\Theta \qquad \Sigma\rightarrow\Pi}{\Gamma,\ \Sigma^*\rightarrow\Theta^*,\ \Pi}\ (\mathfrak{M})$$

この新しい式 $\Gamma, \Sigma^*\rightarrow\Theta^*, \Pi$ の grade は，$\Gamma,\ \Delta^*\rightarrow\Theta^*,\ \Lambda$ の grade と同じであるが，右の rank が1つ小さくなっているから，帰納法の仮定より

$\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi$ は mix なしで証明できる．この証明図につづけて次のように行なうと求める式をうる．すなわち

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi}{\Sigma^*,\ \Gamma \to \Theta^*,\ \Pi}\ (e\to)\ \text{を何度か行なう}}{\Delta^*,\ \Gamma \to \Theta^*,\ \Lambda}\ I_2}{\Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (e\to)\ \text{を何度か行なう}$$

I_2 が2つの上式をもつ推論である場合にも同様にできる．

2.1.3 I_2 が論理記号に関する推論規則で，I_2 の主論理式が S_2 の左辺の $\mathfrak{M}$ であるとき，ただし $\mathfrak{M}$ は S_1 の左辺に含まれていないものとする．このときは $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号によって分類し $\wedge, \vee, \forall, \exists, \neg, \supset$ の各場合について行なう．

① $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が $\wedge$ のとき $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の形であり I_2 は $(\wedge\to)$ である．証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}\ (\wedge\to)}{\Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$$

$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ は Θ および Δ に含まれており，仮定より Γ には含まれていない．さてこれを次のように変形する．

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{A},\ \Delta \to \Lambda}{\Gamma,\ \mathfrak{A},\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}{\mathfrak{A},\ \Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (e\to)\ \text{を何度か用いる}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (\wedge\to)}{\dfrac{\Gamma,\ \Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Theta^*,\ \Lambda}{\Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda}\ (e\to)\,(\to e)\,(c\to)\,(\to c)\ \text{を何度か用いる}}\ (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$$

さて変形後，mix は2個所あらわれるが上の方の mix は除くことができる．何故なら grade はまえと同じであるが rank は右の rank が一つ小さくなっているから，帰納法の仮定がつかえるからである．そこで $\Gamma,\ \mathfrak{A},\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda$ の上に mix のない証明図を書きこむ．次に下の方の mix もとり除くことができる．何故なら $\mathfrak{A},\ \Gamma,\ \Delta^* \to \Theta^*,\ \Lambda$ の左辺は $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ を含んでいないので，この mix は右の rank が1であり（もとの mix は右の rank は2以上であった）したがって rank が小さくなったから，帰納法の仮定によって下の mix もまた除けることになる．

② $\mathfrak{M}$の一番外側の記号が$\vee$のとき $\mathfrak{M}$は$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$の形であり$I_2$は($\vee\to$)である．証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\varDelta\to\varLambda \qquad \mathfrak{B},\varDelta\to\varLambda}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \varDelta\to\varLambda}\,(\vee\to)}{\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$$

$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$は$\Theta$および$\varDelta$に含まれており，$\Gamma$には含まれていない．さてこれを次のように変形する．

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \mathfrak{A},\varDelta\to\varLambda}{\Gamma,\mathfrak{A},\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})}{\mathfrak{A},\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \mathfrak{B},\varDelta\to\varLambda}{\Gamma,\mathfrak{B},\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})}{\mathfrak{B},\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\vee\to)}{\dfrac{\Gamma,\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \Theta^*,\ \varLambda}{\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$$

まず一番上に現われた2つの mix はとり去ることができる．何故なら，この二つの mix では grade はもとのものと同じであるが右の rank が1だけ小さくなっているから，帰納法の仮定がつかえる．その下の ══ は必要あれば($e\to$)を何度か用いることを示している．下のほうの mix もまたとり去ることができる．何故なら推論($\vee\to$)の二つの上式の左辺には$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$が含まれないからこの mix については右の rank が1となり，もとの rank より小さくなるからである．

③ $\mathfrak{M}$の一番外側の記号が$\forall$のとき $\mathfrak{M}$は$\forall x\,\mathfrak{F}(x)$の形であり，$I_2$は($\forall\to$)である．証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \dfrac{\mathfrak{F}(t),\varDelta\to\varLambda}{\forall x\,\mathfrak{F}(x),\varDelta\to\varLambda}\,(\forall\to)}{\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\forall x\,\mathfrak{F}(x))$$

$\forall x\mathfrak{F}(x)$は$\Theta,\varDelta$に含まれており，Γには含まれていない．これを次のように変形すればよい．①と同様であるから証明図だけを書くと

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta \qquad \mathfrak{F}(t),\ \varDelta\to\varLambda}{\Gamma,\mathfrak{F}(t),\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\forall x\,\mathfrak{F}(x))}{\mathfrak{F}(t),\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(e\to)\text{を何度か用いる}}{\forall x\,\mathfrak{F}(x),\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(\forall\to)}{\dfrac{\Gamma,\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \Theta^*,\ \varLambda}{\Gamma,\varDelta^*\to\Theta^*,\ \varLambda}\,(e\to)(\to e),(c\to)(\to c)\text{を何度か用いる}}\,(\forall x\,\mathfrak{F}(x))$$

④ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が∃のとき　$\mathfrak{M}$ は $\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ の形であり，I_2 は (∃→) である．証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \cfrac{\mathfrak{F}(a), \Delta \to \Lambda}{\exists x\,\mathfrak{F}(x), \Delta \to \Lambda}\ (\exists\to)}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\exists x\,\mathfrak{F}(x))$$

$\exists x\,\mathfrak{F}(x)$ は Θ, Δ に含まれており，Γ には含まれていない．また a は (∃→) の下式に現われない（変数条件）．

この場合，この証明図に一度も現われない自由変数 b をとり，$\mathfrak{F}(a), \Delta \to \Lambda$ の証明図の中の a をすべて b でおきかえると，自由変数のおきかえ i）を用いて $\mathfrak{F}(b), \Delta \to \Lambda$ の証明図がえられ，しかも mix は含まれていない．そこで次のように変形する．

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{F}(b), \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{F}(b), \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\exists x\,\mathfrak{F}(x))}{\mathfrak{F}(b), \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}}{\exists x\,\mathfrak{F}(x), \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\exists\to)}{\cfrac{\Gamma, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Theta^*, \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}}\ (\exists x\,\mathfrak{F}(x))$$

この変形で $\mathfrak{F}(b), \Delta \to \Lambda$ の上にはこれの証明図をのせる．

第1の mix は右の rank が1つ小さくなるから，帰納法の仮定から取り去ることができる．(∃→) は b が $\exists x\,\mathfrak{F}(x), \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda$ に入らないよう選んであるから変数条件をみたしている．第2の mix は右の rank が1で，もとの rank より小さいから，帰納法の仮定で除くことができる．

⑤ $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が ┐ のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている．

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \cfrac{\Delta \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Delta \to \Lambda}\ (\neg\to)}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\neg\mathfrak{A})$$

$\neg\mathfrak{A}$ は Θ, Δ に含まれるが，Γ には含まれない．これを次のように変形する．

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \Delta \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda, \mathfrak{A}}\ (\neg\mathfrak{A})}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}\ (\neg\to)}{\cfrac{\Gamma, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Theta^*, \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}}\ (\neg\mathfrak{A})$$

⑥ $\mathfrak{M}$の一番外側の記号が $\supset$ のとき　証明図の mix の部分は次の形をしている.

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\Sigma \to \Pi, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}, \Sigma, \Delta \to \Pi, \Lambda}\,(\supset\to)}{\Gamma, \Sigma^*, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda}\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$$

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ はΘに含まれる. また Σ, Δ の少なくも一方には含まれる. Γには含まれていない.

さてこれを次のように変形しよう.

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ がΣに含まれΔには含まれていないとする.

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \Sigma \to \Pi, \mathfrak{A}}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \mathfrak{A}}\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}) \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma^*, \Delta \to \Theta^*, \Pi, \Lambda}\,(\supset\to)}{\begin{array}{c}\Gamma, \Gamma, \Sigma^*, \Delta \to \Theta^*, \Theta^*, \Pi, \Lambda \\ \hline\hline \Gamma, \Sigma^*, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda\end{array}}\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$$

$$\because \quad \Delta = \Delta^*$$

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ が Σ, Δ にともに含まれているとする.

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \Sigma \to \Pi, \mathfrak{A}}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\begin{array}{c}\Gamma, \mathfrak{B}, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda \\ \hline\hline \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda\end{array}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma^*, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Theta^*, \Lambda}}{\begin{array}{c}\Gamma, \Gamma, \Sigma^*, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Theta^*, \Pi, \Theta^*, \Lambda \\ \hline\hline \Gamma, \Sigma^*, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda\end{array}}$$

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ がΔに含まれ, Σに含まれないとき

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \dfrac{\Sigma \to \Pi, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\begin{array}{c}\Gamma, \mathfrak{B}, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda \\ \hline\hline \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda\end{array}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}, \Sigma, \Gamma, \Delta^* \to \Pi, \Theta^*, \Lambda}}{\begin{array}{c}\Gamma, \Sigma, \Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Theta^*, \Lambda \\ \hline\hline \Gamma, \Sigma^*, \Delta^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda\end{array}}\,(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$$

2.2 $\rho_r=1$ のとき　このとき $\rho_l>1$ だから 2.1 とほぼ同じようにして証明することができる.

以上で述語計算 LK に対する基本定理の証明が終わった.　*qed*

なお, 述語計算 LJ に対する基本定理の証明は, LK の場合とほとんど同様である. LJ においては式の右辺はたかだか一つの論理式しかあらわれないと

いう点に留意して LK のときの証明を忠実にたどればよいからここでは省略する．ただ LJ では推論規則の双対性は成り立たないから，LK の証明において双対的にできると述べた部分についてはとくに注意を要する．

4・3 基本定理の応用

A．無矛盾性

定理 5 述語計算 LK および LJ は無矛盾である．

証明 もし LK が矛盾であると仮定すれば，LK で $\rightarrow\mathfrak{A}$ と $\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ がともに証明可能となり

$$\dfrac{\rightarrow\neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\rightarrow\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}\rightarrow}}{\rightarrow}$$

より $\rightarrow$ が証明可能となる．したがって基本定理より $\rightarrow$ の cut を含まない LK の証明図が存在する．しかし LK の推論規則のうち cut を除いたほかのものについては $\rightarrow$ を下式とするような推論規則は存在しない．また $\rightarrow$ は始式ではありえない．ゆえに，$\rightarrow$ は証明可能でない．

この議論は LJ についても成り立つことは明らかである． *qed*

B．決定問題

任意の形式的体系が与えられたとき，この体系において定義された任意の論理式が，この体系で証明可能であるか否かを有限回の手順で判定する具体的な手続きを**決定手続き**（decision procedure）といい，また手続きが存在するときこの体系は**決定可能である**（decidable）という．

定理 6 命題計算 LK および LJ は決定可能である．

証明 この定理を証明するには LK および LJ に対する決定手続きを具体的に与えればよい．まず既約という概念を定義し，次の補助定理を証明しよう．

LK の任意の式について，その左辺に同じ論理式はたかだか 3 個しか含まれず，また同じように右辺にも同じ論理式がたかだか 3 個しか含まれていないとき，この式を**既約**（reduced）であるという（LJ では右辺にはもちろんたかだか一つの論理式しか含まれないから，右辺についての上の条件は不要である）．

例 $A \vee B$, C, $A \vee B$, $B \wedge C$, $A \vee B \to \neg D$, $C \vee D$, $\neg D$ は既約な式である.

補助定理 7 既約な式を終式にもつ証明図があれば，これと同じ終式をもつ証明図が存在して，この証明図に現われる式はすべて既約であるようにできる. また始めの証明図が cut を含まないならば，新しくできた証明図も cut を含まないようにできる.

証明 まず任意の既約でない式 S に対しては，$(e\to)$，$(\to e)$ および $(c\to)$，$(\to c)$ を何回か用いると既約な式 S' がえられ，また逆に既約な式 S' に対しては $(w\to)$，$(\to w)$ および $(\to e)$，$(e\to)$ を用いるともとの S が導けるから，任意の既約でない式 S に対し，S と同値でかつ既約な式 S' が存在する. さて既約な式を終式とする証明図があるとする. 始式および終式は既約であるからそのままにしておいて，この証明図に現われる各推論規則について次のような変形を行なう.

推論規則の上式および下式にパラメーター Γ があるとき，Γ の中には一つの論理式はたかだか一回しか現われないように，下式の Γ の中の論理式を消し，同時に上式の Γ の中の論理式も同じ個数だけ消す. このことを Δ, Π, Σ, Θ などについても同様に行なう. この操作をつづけるとき，上式と下式が同じになれば一方の式を消し，また場合によっては cut 以外の構造に関する推論規則を補えば補助定理は成り立つ. *qed*

したがって次のことがいえる. 証明可能かつ既約な式 $\Gamma \to \Delta$ に対し，cut のない LK 証明図が存在し，証明図に現われる式はすべて既約であり，しかも各式に含まれる論理式はすべて，Γ および Δ に含まれる論理式の部分論理式ばかりからなっている.

このことから決定手続きを次のように与えることができる.

(命題計算 LK の決定手続き) 命題計算 LK の任意の式 S が一つ与えられたとする. この式と同値で既約な式が存在するからこれを S' とする.

S に含まれる各論理式のすべての部分論理式を数え上げる. これは有限個しかない. これら有限個の論理式からつくられる既約な式をすべて数え上げる. これらの数もまた有限個しかない（既約だから）これら既約な式の全体を $\mathfrak{S}$ とする.

まず $\mathfrak{S}$ の中で始式をすべてとり出し，それらは証明可能であるというしる

しに∨印をつける．$\mathfrak{S}$の残りの式について次のようなものがあるか否かを調べる．各推論規則について，その一つまたは二つの上式がすでに証明可能として∨印をつけたものになっていて，その下式が$\mathfrak{S}$の残りの式のどれかになっているものをさがし，下式になりうるものがあれば∨印をつける．

このことを続ければ有限回の操作の後には，始めに与えられた式 S' に∨印がつくか否かがわかり，∨印がつけば S' したがって S が証明可能，∨印がつかなければ S は証明可能でないことがわかる．

LJ に関しても全く同様である．したがって定理6が証明できた． *qed*

注 なお証明可能とわかったときは，上の手続きにしたがって具体的な証明図がえられることがわかる．

C．述語計算 LJ の一性質

定理 8 LJ で $\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ が証明可能であれば，$\to \mathfrak{A}$ かまたは $\to \mathfrak{B}$ が証明可能である．

証明 基本定理より $\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ の cut のない証明図が存在する．LJ の推論規則のうち，下式が $\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ であるようなものをさがすため，まず推論規則のうち，下式の左辺が空で右辺がただ一つの論理式でしかもその一番外側の記号が ∨ の可能性のあるものを求めれば次の3つである．

$$\frac{\to}{\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\to w), \quad \frac{\to \mathfrak{A}}{\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}, \quad \frac{\to \mathfrak{B}}{\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\,(\to \vee)$$

このうち，$\to$ は LJ で証明可能でないから，$\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ を下式とする推論規則は（$\to w$）ではありえない．したがって証明図の一番下に用いられた推論規則は（$\to \vee$）であることがわかる．したがって $\to \mathfrak{A}$ が証明可能であるか $\to \mathfrak{B}$ が証明可能であるかのいずれかが成り立つ． *qed*

定理8を用いると LJ では排中律は一般には成り立たないことが次のようにして証明される．

$\to A \vee \neg A$ が LJ で証明可能でないことを示せばよい．いま $\to A \vee \neg A$ が LJ で証明可能とする．定理8より $\to A$ が証明可能か $\to \neg A$ が証明可能かのいずれかが成り立つ．ところでもし $\to A$ が LJ で証明可能とすれば，これを下式とするような推論規則は ($\to w$) と ($\to c$) だけでありこのとき上式は$\to$となるが，$\to$ は証明可能でないから $\to A$ は証明可能ではない．

次に $\to \neg A$ が証明可能とすれば，これを下式とする推論規則は（$\to w$）の

ほかは（$\to\neg$）だけであり，このとき上式は $A\to$ とならねばならない．Aは命題変数で論理記号を含んでいないから，$A\to$ をさらに下式とするような推論規則は（$c\to$）しかありえない．このときこの推論規則の上式は $A,\ A\to$ となる．この式について同様の議論をつづけて行けば，$\to\neg A$ から上にたどったとき現われる式は $A, A, \cdots, A\to$ の形に限られる．しかしこれらはいずれも始式にはなりえない．すなわち $\to\neg A$ もまた証明可能でない．したがって

定理 9　$\to A\vee\neg A$ は LJ で証明可能ではない．

注　定理8は LK では成り立たない．なぜなら，$\to A\vee\neg A$ は LK で証明可能であるけれども $\to$A かまたは $\to\neg$A が証明可能であるとは限らないからである．

第5章　自　然　数　論

第5章では数理論理学の大切な応用の一つとして，自然数論の無矛盾証明をとり上げる．自然数の体系が無矛盾であることを初めて証明したのは Gentzen であり，その後いろいろ改良がなされているが，ここでは Gentzen による証明を忠実に再現するよう試みた．自然数論，実数論，集合論など数学の公理体系の無矛盾性を形式主義の立場から証明する試みは，数学基礎論の中心課題であるが，その最も基本的な考え方がこの章で述べられる．5·1 節では自然数の公理体系について簡単にふれる．ここでは最も簡単な形での自然数論を扱うことにする．5·2 節ではAにおいてまず自然数論の無矛盾であることをどの様に証明するかの筋道を述べ，Bでは具体的に証明を進め，Cでは証明の手段が有限回の操作で終わることを超限順序数を用いて証明する．

5·1　自　然　数　論

この章では数理論理学の著しい応用の一例として自然数論の体系が無矛盾であることを証明するわけであるが，ここではまず自然数論の公理系としてよく知られている Peano の公理を述べ，これから自然数に加法が定義できるということを導いておこう（自然数として0を入れる場合も入れない場合もあるが本質的な差異はないので，本書では各章により都合のよいほうを用いている）．

A．Peano の公理

定義 1　Peano の公理とは次の5つの公理から成り立っている．

P1　0は自然数である

P2　x が自然数ならば，x' もまた自然数である

P3　x, y が自然数のとき，$x'=y'$ ならば $x=y$ である

P4　$x'=0$ をみたす自然数は存在しない

P5　$A(x)$ を自然数 x に関する命題とするとき，

　i）$A(0)$ が成り立ち，

　ii）すべての自然数 x について，$A(x)$ が成り立つならば $A(x')$ が成り立つ

がみたされるならば，すべての自然数 x について $A(x)$ が成り立つ．

注　x' は x の次の自然数を表わしている．$'$ は**後者**（successor）を与える関数である．x' は内容的に「x に 1 を加える」ことを表わしているが，これについては後に述べる．P5 は数学的帰納法の公理といわれる．

以下自然数を x, y, a などの文字で表わす．また自然数全体の集合を N で表わす．公理 P1～P5 から導かれる自然数の性質を 二，三 述べよう．

（1）　$x' \neq x$

∵　x についての帰納法による．

$x=0$ のとき，公理 P4 より $0' \neq 0$ は明らかである．次に $x' \neq x$ を仮定して $x'' \neq x'$ を示せばよいが公理 P3 の対偶をとれば明らかである．

（2）　$x \neq 0$ のとき，$y'=x$ をみたす自然数 y は一意に存在する．

∵　x についての帰納法による．$x=0$ のとき仮定は成り立たないから（2）は成り立つ．次に $y'=x$ をみたす y が存在すると仮定し，$y'=x'$ をみたす y をみいだせばよいが，$y=x$ とすれば十分である．

一意性は，$y'=x$ をみたす y が二つあったとし，y_1, y_2 とすれば $y_1'=x=y_2'$ となり，P3 より $y_1=y_2$ をうる．

次に二つの自然数の和を定義するためにある自然数 a を固定し，a と任意の自然数 y との和を帰納的に次のように定義する．

$$\begin{cases} a+0=a \\ a+y'=(a+y)' \end{cases}$$

すなわち，$y=0$ のとき $a+y$ の値が定義され，また $a+y$ の値がわかっているとき，これを用いて $a+y'$ が定義される．ただしこの場合，y の関数 $a+y$ が一意に存在することを証明しておかねばならない．そこで $a+y$ を $\varphi(y)$ と書くことにすれば，次の定理が成り立つ．

定理 1　a をある自然数，y を任意の自然数とするとき，

$$\begin{cases} \varphi(0)=a \\ \varphi(y')=(\varphi(y))' \end{cases}$$

をみたす N から N の中への関数 φ が一意に存在する．

証明　（一意性）　上の性質をもつ関数が二つあるとし，φ および ψ とすれば，

$$\begin{cases}\varphi(0)=a \\ \varphi(y')=(\varphi(y))'\end{cases} \qquad \begin{cases}\psi(0)=a \\ \psi(y')=(\psi(y))'\end{cases}$$

さて，すべての y について $\varphi(y)=\psi(y)$ が成り立つ.

∵ y についての帰納法による．$y=0$ のとき $\varphi(0)=a=\psi(0)$．次に y のとき $\varphi(y)=\psi(y)$ と仮定すると $\varphi(y')=(\varphi(y))'=(\psi(y))'=\psi(y')$

したがって，$\varphi(y)=\psi(y)$ がすべての y について成り立ち $\varphi=\psi$ である.

（存在） 自然数 a についての帰納法による．$a=0$ のとき，$\varphi(y)=y$ とすればこれが求める関数である．次に a のとき定理に述べた二つの式をみたす φ が存在したと仮定し，これを φ_a と書く．すなわち

$$\begin{cases}\varphi_a(0)=a \\ \varphi_a(y')=(\varphi_a(y))'\end{cases}$$

さて $\varphi_{a'}(y)=(\varphi_a(y))'$ とおけば，$\varphi_{a'}$ は a' のときの求める関数である.

∵ $\varphi_{a'}(0)=(\varphi_a(0))'=a'$

$\varphi_{a'}(y')=(\varphi_a(y'))'=(\varphi_a(y))''=(\varphi_{a'}(y))'$ qed

定理1より $\varphi_x(y)$ は $N\times N$ から N への関数で，すべての x, y に対して一意に存在し，次の関係が成り立つ.

$$\varphi_0(y)=y$$
$$\varphi_x(0)=x$$
$$\varphi_x(y')=(\varphi_x(y))'$$
$$\varphi_{x'}(y)=(\varphi_x(y))'$$

$\varphi_x(y)$ を $x+y$ と書き，x と y の和という．上の四つの式を記号＋を用いて書けば

（３） すべての自然数 x, y に対して，

$$0+y=y$$
$$x+0=x$$
$$x+y'=(x+y)'$$
$$x'+y=(x+y)'$$

をうる．（３）の第三式で $y=0$ とおけば $x+0'=(x+0)'=x'$，$0'$ を 1 とおけば，

（４） $x'=x+1$

が成り立つ．公理 P1〜P5 および（1）〜（3）より次の等式を導くことができる．

（5） すべての自然数 x, y, z に対して

$$x+y=y+x$$

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

$$x+y=x \quad \text{ならば} \quad y=0$$

$$x+z=y+z \quad \text{ならば} \quad x=y$$

$$x+y=0 \quad \text{ならば} \quad x=0 \quad \text{かつ} \quad y=0$$

たとえば，$x+y=y+x$ は（3）を用いると x に関する帰納法により次のように証明される．

$x=0$ のとき，左辺$=0+y=y$

右辺$=y+0=y$

x のとき成り立つと仮定すれば

$$x'+y=(x+y)'$$

$$=(y+x)' \qquad [\because \text{ 仮定より}]$$

$$=y+x'$$

0に後者を表わす関数記号 $'$ をつけた $0', 0'', 0''', \cdots$ を**数字**といい，それぞれ 1, 2, 3, …と略記する．

注　Peano の公理として，0のかわりに1を用いる場合もあるが，本質的には同じことである．自然数の間の大小関係，自然数の積，べきなどについても帰納的に定義することができる．

B．自然数論の公理体系

さて自然数論という数学理論を形式化するために，言語（1）〜（6）を次のように定めよう［2·1 節参照］．

（1） 対象定数としては，数記号0だけを用いる．

（2） 自由変数としては，$a_0, a_1, a_2, \cdots$，$a, b, c, \cdots$ などを用いる．

（3） 束縛変数としては，$x_0, x_1, x_2, \cdots$，$x, y, z\cdots$ などを用いる．

（4） 関数記号としては，前述の $'$ を用いる．1変数の関数記号である．

（5） 述語記号としては，等号$=$，不等号$<$を用いる．

（6） 論理記号としては，$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$ を用いる（$\supset$は除いておく）．

(2),(3),(6) については LK の場合とほとんど同じであるが，LK と異なる部分について以下注意を与えておこう．

(i) 項は $0, 0', 0'', 0''', \cdots$ あるいは自由変数 a または $a', a'', a''', \cdots$ などに限られる（関数記号として＋や・は用いないから $0'\cdot a+b$ などは項としてあらわれない）．0 に $'$ を n 個つけたものを $\boldsymbol{n}$ と略記する．

(ii) 述語記号＝，＜などの変数場所に項を代入したもの，およびそれらに論理記号をほどこしてできたものは論理式である（2·1 節）が，自然数論においては述語記号の変数場所に数字 $0, 0', 0'', \cdots$ を代入したときできる論理式の真偽はあらかじめ定まっているものと仮定する（entscheidbar definiert）（述語記号＝，＜のほかに関数記号として＋や・を用いる場合にも，この仮定がみたされているものとするがここでは必要ない）．

（論理式の例）

$$a>0' \qquad b''=c \qquad 0''<0'''$$

$$(a>0')\wedge(b''=c)$$

$$(a>0')\wedge\exists x(x''=c)$$

$$\forall y((y>0')\wedge\exists x(x''=c))$$

注　はじめの三例はいずれも論理記号を含まないから素論理式であり，とくに第三番目のものは自由変数を含まないから閉論理式である．一番外側の記号とか，grade の定義はまえに述べたとおりである．

(iii) 式の定義は LK における定義と同一である．式に現われる論理式が自由変数を含まないときは，各論理式は真か偽かが定まるように定義できるから，任意の式に対しても式が真であるか偽であるかを次のようにして定義することができる．すなわち，自由変数を全く含まない式 S に対しては，S の左辺に現われる論理式がすべて真で，右辺に現われる論理式がすべて偽であるとき（左辺または右辺が空である場合も含めて），**式 S は偽である**と定義し（したがって式 → も偽となる），それ以外の場合 **式 S は真である**と定義しよう．また**自由変数を含む式 S が真である**というのは，自由変数にどんな任意の数字 $\boldsymbol{n}$ を代入しても上の意味で真な式が得られるときであると定義する．たとえば $\rightarrow a=a$, $\rightarrow a<a+b'$ などは真な式である．

(iv) 推論規則は LK と全く同じものを用いる（4·1 節A項）が，さらに

次の推論規則を付け加えることにする．

VJ (vollständig Induktion)-推論規則

$$\frac{\mathfrak{F}(a),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(0),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(t)}\ (\mathrm{VJ})$$

（ただし a は $\mathfrak{F}(0), \Gamma, \Theta$ に現われないものとする）

これは数学的帰納法の公理を推論の形で形式化したものである．ここで論理式 $\mathfrak{F}(0)$ の grade をこの VJ-推論規則の grade とよぶ（これは $\mathfrak{F}(a)$, $\mathfrak{F}(a')$, $\mathfrak{F}(t)$ の grade と同じである）．また自由変数 a を（$\to\forall$）や（$\exists\to$）のときと同じように **eigenvariable** という．

（v）始式は**論理的始式**（logical beginning sequent）と**数学的始式**（mathematical beginning sequent）の二種類ある．論理的始式は LK においてただ始式とよばれていたものと同じで $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の形の式をいう．ただし $\mathfrak{D}$ は任意の論理式を表わす．数学的始式は素論理式からなる数学的に真な式であり，通常＝，＜および $'$ についての基本的な性質を式の形で述べたものが採用されるが，関数記号＋を用いて自然数の性質を式の形に述べる場合も多く一定しない．ただしいずれの場合にも帰納法の公理に対応するものは推論規則の形ですでにとり扱っているから，数学的始式からは除外する．

（数学的始式の例）

$\to a=a$	$a=b,\ b<c \to a<c$
$a=b \to b=a$	$a=b,\ c<b \to c<a$
$a=b,\ b=c \to a=c$	$\to 0=a,\ 0<a$
$\to a<b,\ a=b,\ b<a$	$\to a<a'$
$a<b,\ a=b \to$	$a<b \to a'=b,\ a'<b$
$a<b,\ b<a \to$	$a=b \to a'=b'$
$a<b,\ b<c \to a<c$	

注　以上の 14 個の式を数学的始式としてとる場合，自然数論としてこれだけの公理から導かれるものを考えていることになる．

（vi）証明図の定義は LK の定義の場合と同様であるが，VJ-推論規則が付け加わり，また始式として数学的始式がゆるされるという点で LK が拡張されている．

（証明図の例）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to 0=0 \qquad \dfrac{a=a \to a'=a'}{0=0 \to b=b}\,\mathrm{VJ}}{\to b=b}\,\mathrm{cut}}{\to \forall x\,(x=x)}\,(\to\forall) \qquad \dfrac{1'''=1''' \to 1'''=1'''}{\forall x\,(x=x) \to 1'''=1'''}\,(\forall\to)}{\to 1'''=1'''}\,\mathrm{cut}$$

$$\begin{array}{c}
a=b \to b=a \\ \hline
(a=b)\wedge\neg(b=a) \to b=a \\ \hline
\neg(b=a),\ (a=b)\wedge\neg(b=a) \to \\ \hline
(a=b)\wedge\neg(b=a),\ (a=b)\wedge\neg(b=a) \to \\ \hline
(a=b)\wedge\neg(b=a) \to \\ \hline
\to \neg((a=b)\wedge\neg(b=a)) \\ \hline
\to \forall y\neg((a=y)\wedge\neg(y=a)) \\ \hline
\to \forall x\forall y\neg((x=y)\wedge\neg(y=x))
\end{array}$$

以上Bで述べた自然数論の体系を仮に体系 $\mathfrak{S}$ とよぼう．われわれの目的は体系 $\mathfrak{S}$ の無矛盾証明を与えることである．ここではとり扱いの便宜上 $\mathfrak{S}$ として関数記号は $'$ だけを用いることにした．関数記号として＋や・の導入された自然数論の体系においても同じようにして無矛盾証明を与えることができる．

5·2　自然数論の無矛盾証明

A．自然数論の無矛盾証明の筋道

この節では自然数論が無矛盾であることを証明する．自然数論の体系 $\mathfrak{S}$ が無矛盾であるとは，$\mathfrak{S}$ のどんな証明図も終式として矛盾を表わす式 → をもたないことであると定義しよう．

したがって証明の仕方としては，まず簡単な証明図（実際には論理記号に関する推論規則，および VJ-推論規則を全く含まない証明図）について，これが式 → を導かないことを示し，次に一般に任意の複雑な証明図の無矛盾性をより簡単な証明図の無矛盾性に帰着させ，しかもこの操作が有限回で終わることを証明するために超限帰納法が用いられることになる．これらの仕方を具体的に行なうには，次の（1）～（3）の手順をふむことになる．まず，

（1）→を終式とする任意の証明図を考え，これをより簡単な（終式として → をもつ）証明図に変形する．次に

（2）“より簡単”ということを数学的に厳密に表わすために．各証明図に

順序数を対応させ，“より簡単な証明図”というのが，“より小さい順序数をもつ証明図”となるように対応づけを定義する（すなわち簡単という漠然とした概念を順序数が小さいということで定義するわけである）．これを用いて（1）の変形に対し，証明図に対応させた順序数が変形の後小さくなることを示す．

（3）（1）および（2）より超限帰納法を用いると，最初に与えた証明図を有限回変形することにより，→ を終式とする簡単な証明図にいたり，かつこれから不合理が得られることが示される．これによって目的が達せられる．

上の（1）で述べた証明図の変形の考え方をもう少し補足しておこう．

まず，終式が → であるような任意の証明図が与えられたとし，これについて考える．終式 → は式としては全く簡単な形をしているために，この簡単な式を複雑な証明図を用いて証明することができるならば，次のように直観的に考えて，まえより，より簡単な証明図を用いて → を導くことは可能であろうと思われる．すなわち，与えられた → の証明図の中で一番複雑な式（たとえば論理記号が一番多い論理式を含む式と思ってもよい）がどこかにあれば，一般にはこの式に含まれ，論理記号の一番多い論理式の一番外側の論理記号は，この証明図の中でこの論理式より上で，ある推論規則によって導入され，またこれより下で，ある推論規則によって除去されていると考えてよいから，われわれは一番外側の記号の導入されるまえの部分論理式から，この記号を除去された後の論理式へ直接にうつるよう変形することができるであろう．これが論理記号に関する推論規則を変形するときの基本的な考え方である．

VJ-推論規則の場合には上とは少し事情が異なり，この場合 VJ-推論規則の下式の項 t が数字のときには（したがって t はある具体的な自然数 n である），この推論規則を n 個の cut の列を用いておきかえることになる．しかし本質的なのは，VJ-推論規則の下式の項 t が自由変数を含んでいる（したがって t は自由変数に $'$ を有限個つけた形をしている）場合であり，このときは上のようにすぐ変形することはできないが，他の変形を行なっているうちに自由変数のところが自然数でおきかえられ，したがって上の変形が行なわれるようになることが示される（これについては後述する）．

したがって，→ を終式とする証明図中のいろいろの推論規則のうち，いつも少なくも一つは変形するところがみいだされることが可能であることを証明

しなければならない.

さて，各推論規則を変形する規則を述べねばならないが，そのまえに不要の自由変数をとり去るという準備を行ない，その後 VJ-推論規則と論理記号に関する推論規則の変形の仕方を定義しよう.

B. 推論規則の変形

a. 自由変数のおきかえ 一般に，証明図の中に用いられている自由変数は内容的には「任意の対象」を表わしており，そのために自由変数は推論規則の eigenvariable として用いられるわけであるが，eigenvariable として用いられていない自由変数は，この場合自由変数としての本来の働きをしていないという意味では余分なものであり，これらの変数を任意の自然数たとえば0でおきかえてしまってもよい．これによって証明図であるという性質は保たれており，また終式の → も不変である．そこで，

> **自由変数のおきかえ** "証明図に現われる自由変数のうち，eigenvariable として用いられていない自由変数はすべて数字0でおきかえ，また(→∀)(∃→) および VJ-推論規則の eigenvariable はすべて異なるようにおきかえる"

を行なう．以後とり扱う証明図では自由変数のおきかえがすでに行なわれたものと仮定する.

さらにいま一つ，証明図の終式部分という概念を次のように定義しよう．証明図の一つの糸に対し，終式からこれを上へたどり，① 論理記号に関する推論規則の下式に達すれば，この推論規則の下式から終式までに含まれるすべての式を数え，② 論理記号に関する推論規則に達しないときは，その糸のすべての式を数える．終式を含むすべての糸について上の ①，② に述べた式の集まりは証明図の一つの部分を形作っている．この図形を証明図の**終式部分** (Endstück) という.

注 証明図の各糸について，一番下に現われる論理記号に関する推論規則の下式は終式部分に属し，上式は終式部分に属していない．また糸が論理記号に関する推論規則を全く通らなければ，この糸の一番上に現われる始式もまた終式部分に属している.

したがって，証明図の終式部分は，構造に関する推論規則と VJ-推論規則だけから成り立っていることがわかる.

さて → を終式とする証明図が一つ与えられたとする．次の二つの場合にわけて証明図の変形を行なう．

1.　この証明図の終式部分が少なくも一つ VJ-推論規則を含むとする．このときは次に述べる VJ-変形を行う（b）．

2.　終式部分が VJ-推論規則を含まないとする．このときはあらかじめ準備的な変形（c）を行なってから，論理変形（論理記号についての推論規則の変形）を行なう（d）．

b．VJ-変形　　証明図の終式部分が eigenvariable 以外の自由変数を含まず VJ-推論規則を含むとする．終式部分において一番下にあらわれる VJ-推論規則をとり扱うことにする．すなわち，この VJ-推論規則の下式から始まる証明図の糸は，この式から終式までの間に他の VJ-推論規則を通らないものとする（一番下に現われる VJ-推論規則が二つ以上あることもおこるが，このときはたとえば一番左のものをえらぶというように順序をきめておけば一意にとり扱うものが定まる）．

VJ-推論規則は，次の形をしている．

$$\frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(t)}$$

下式の右辺に現われる項 t はこの場合ある数字 n に等しい．なぜなら，t がもし自由変数を含んでいるとすれば，t は a と異なる自由変数 b に $'$ を有限個つけた形をしているが，この下式から下には eigenvariable を含む推論規則はいずれもあらわれないから，証明図は eigenvariable でない自由変数を含むこととなり不合理である．したがって，t は 0 に $'$ を有限個つけた形となり，t はある数字 n に等しい．

さて，この VJ-推論規則を次の形の図形でおきかえる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0') \qquad \mathfrak{F}(0'), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0'')}{\mathfrak{F}(0), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(0'')}\ \text{cut}}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0'')} \qquad \mathfrak{F}(0''), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0''')}{\dfrac{\mathfrak{F}(0), \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta, \mathfrak{F}(0''')}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0''')}}\ \text{cut}$$

$$\vdots$$

$$\frac{}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(n)}$$

この図形は明らかに構造に関する推論規則だけからなり立っている．VJ–推論規則をこの新しい図形でおきかえることを **VJ-変形**という．

この図形で $\mathfrak{F}(0),\ \Gamma\rightarrow\Theta, \mathfrak{F}(0')$ や $\mathfrak{F}(0'),\ \Gamma\rightarrow\Theta, \mathfrak{F}(0'')$ などの上には，変形を行なうまえの VJ–推論規則の上式 $\mathfrak{F}(a), \Gamma\rightarrow\Theta, \mathfrak{F}(a')$ の証明図で，自由変数 a は他の場所で再び eigenvariable として用いられていないとしてよいから（自由変数のおきかえ）この a のところへ数字 $0, 0'\cdots$ などを代入したものを書くことにする．また変形後一番下にくる式 $\mathfrak{F}(0),\ \Gamma\rightarrow\Theta,\ \mathfrak{F}(n)$ から下には，もとの証明図の残りの部分をそのまま書くことにする．

なお，とくに $n=0$ のときは もとの VJ–推論規則の下式は $\mathfrak{F}(0), \Gamma\rightarrow\Theta, \mathfrak{F}(0)$ であるから，VJ–変形として

$$\frac{\mathfrak{F}(0)\rightarrow\mathfrak{F}(0)}{\overline{\mathfrak{F}(0),\ \Gamma\rightarrow\Theta,\ \mathfrak{F}(0)}}$$

を用いる．なおこの下式から下には，もとの証明図の残りの部分をそのまま書く．

この VJ–変形によって，与えられた → を終式とする証明図は，やはり同じ終式 → をもつ証明図に変形されることは明らかであろう．しかも大切なことは，その際 VJ–推論規則は（cut を含めて）構造に関する推論規則だけでおきかえられたということである．

次に → を終式とする証明図が，その終式部分に VJ–推論規則を全く含まない場合をとり扱う．この場合論理変形を行なうまえに，準備的な変形を行なう必要がある．この準備的な変形というのは証明図から $(\rightarrow w), (w\rightarrow)$ と論理的始式を取り去る変形である．これについて以下述べよう．

c．準備的な変形　まずここでは終式部分に VJ–推論規則がないことより，終式部分は構造に関する推論規則だけを含んでいるとする．また終式部分の一番上にある式は，論理記号に関する推論規則の下式かまたは始式である．終式部分は eigenvariable を含む推論規則は全く含まれていないから，自由変数は全く含まれていない．さてここでまた新しい概念を定義しておく．

構造に関する推論規則の上式および下式で対応している同じ論理式は**結合されている**（verbunden）という．

すなわち，$(\rightarrow c)$ で $\mathfrak{A}$ と書かれている三つの論理式は結合されており，また

上式のΓに含まれる論理式の最初のものは，下式のΓに含まれる論理式の最初のものと結合されている．cut では上式にある二つの副論理式$\mathfrak{A}$は互いに結合されている．

証明図の終式部分の中で一つの論理式から出発して，これと結合されている論理式を順次にたどるとき通りすぎる論理式の全体を，始めの論理式に属する**論理式の鎖**（Formelbund）あるいは単に**鎖**という．

明らかに構造に関する推論規則では，cut 以外の推論規則については，上式の任意の論理式に対し，これと結合されている論理式は下式に必ず現われる．このことを用いると次のことがわかる．すなわち，終式部分は構造に関する推論規則しか含まれていないから，この終式部分に含まれる任意の一つの論理式を$\mathfrak{A}$とする．定義より$\mathfrak{A}$に属する論理式の鎖が必ず存在するが，この論理式の鎖の一番下には cut の副論理式が現われていることがわかる．なぜなら，この終式部分の一番下は矛盾の式 → であり，また cut 以外の推論規則については，上式に含まれる論理式と結合されている論理式は必ず下式に含まれているからである．すなわち，論理式の鎖に対して cut が一つ定まる．

このことを異なった立場から考えよう．いま cut の一つに着目する．cut の左上式に現われる副論理式を$\mathfrak{A}$とし，$\mathfrak{A}$と結合されている論理式を順次上方にたどるとき，$\mathfrak{A}$に属する論理式の鎖をうるが，これを**左の鎖**という（左の鎖に含まれる論理式はすべて式の右辺に現われる）．またこの cut の右上式に現われる副論理式も$\mathfrak{A}$であり，これと結合されている論理式を順次上方にたどるとき，$\mathfrak{A}$に属する論理式の鎖を**右の鎖**という（右の鎖に含まれる論理式はすべて式の左辺に現われる）．左および右の鎖をこの **cut に属する鎖**という．cut が指定されれば，この cut の副論理式に属する鎖は一意に定まる．またこの鎖の中に別の cut の副論理式が含まれることはありえない．

さて終式部分より $(\rightarrow w)$, $(w \rightarrow)$ および論理的始式をとり除こう．

1. $(\rightarrow w)$, $(w \rightarrow)$ の除去．終式部分に VJ-推論規則を含まない（→ にいたる）証明図を考えよう．

$(\rightarrow w)$ または $(w \rightarrow)$ の一つたとえば $(w \rightarrow)$ に着目し，これの下式に現われる主論理式を$\mathfrak{A}$としよう．終式部分の中で$\mathfrak{A}$と結合されている論理式を下方へ順次一つずつ消去してゆく．このとき

（i） 消されるべき論理式が $(c\to)$ の副論理式となる場合，図形は左図のような形をしている．

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta}\,(w\to) \\
\vdots \\
\dfrac{\mathfrak{A},\mathfrak{A},\Sigma\to\Pi}{\mathfrak{A},\Sigma\to\Pi}\,(c\to)
\end{array}
\quad \text{これを右のように変える} \quad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta} \\
\vdots \\
\dfrac{\mathfrak{A},\Sigma\to\Pi}{\mathfrak{A},\Sigma\to\Pi}
\end{array}
$$

（ii） 消されるべき論理式が cut の副論理式となる場合，図形は左図のような形をしている．

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \vdots \\
 & \dfrac{\Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta}\,(w\to) \\
\vdots & \vdots \\
\Delta\to\Lambda,\mathfrak{A} & \mathfrak{A},\Sigma\to\Pi
\end{array} \\
\hline
\Delta,\Sigma\to\Lambda,\Pi
\end{array}\ \text{cut}
\quad \text{これを右のように変える} \quad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta} \\
\vdots \\
\Sigma\to\Pi \\
\hline\hline
\Delta,\Sigma\to\Lambda,\Pi
\end{array}
$$

なお（i），（ii）の変形で上式および下式が同一になれば，いずれか一方の式をとり除くことにする．また（ii）の変形では新しく $(w\to)$ や $(\to w)$ が用いられることがあるが，このときは（i）を再び用いることにすると cut の個数は有限個であるから，（i）および（ii）を有限回繰り返すことにより終式部分から $(w\to)$，$(\to w)$ はすべて除去され，→ の証明図がえられる．$(\to w)$ についても同様である．

2. 論理的始式の除去．終式部分が VJ-推論規則および $(\to w)$，$(w\to)$ を含まない（→ に到る）証明図を考えよう．終式部分の中では，$\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の形をした論理的始式は cut の上式としてだけ現われる．なぜなら $(c\to)$，$(\to c)$，$(e\to)$，$(\to e)$ などの上式はいずれも少なくも左辺または右辺に二つ以上の論理式を含まねばならないからである．したがってこの場合，図形は次のような形をしている．

$$\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \qquad \overset{\vdots}{\mathfrak{D},\ \Gamma \to \Theta}}{\mathfrak{D},\ \Gamma \to \Theta}\ \text{cut}$$

このときは左上式の $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ を消し，上式および下式に現われる $\mathfrak{D},\ \Gamma \to \Theta$ のいずれか一方を消去する．

以上 1，2 を行なえば，はじめに与えられた → にいたる証明図は変形をうけ，そのさいとくにその終式部分では VJ-推論規則，$(w \to)$，$(\to w)$，論理的始式を全く含まないようにできる．

以下でとり扱う証明図ではすでにこれらの性質をもっているものと仮定する．

d．論理変形

1．まず論理変形を行なうことが常に可能であることを証明しよう．すなわち次の（命題）を証明しよう．

「いまとり扱う証明図の終式部分の中には少なくも一つの論理式の鎖が存在し，その左の鎖および右の鎖の一番上の論理式は，終式部分をきめる論理記号に関する推論規則の主論理式である」……(命題)

鎖という考え方を用いると，証明の中に現われるある一つの命題がどのようにして導入されまた除去されているかを見通すのに都合がよい．なぜなら，左の鎖の一番上に現われる論理式がある推論規則の主論理式になっているときは，この論理式の一番外側の記号はこの規則によって導入されたことがわかるし，また右の鎖の一番上に現われる論理式がある推論規則の主論理式になっているときは，この論理式の一番外側の記号がこの規則によって除かれたことがわかるからである（実際には鎖が $(c \to)$，$(\to c)$ のところで枝分れをしているようなときには面倒であるが）．

さて上のことを次の（ｉ），（ii）にわけて証明する．

（ｉ）「いま考えている証明図は少なくも一つの論理記号に関する推論規則を含む」何故なら，もし全く含まないと仮定すれば，終式部分と証明図の全体とは一致することになる．ところで数学的始式（これは真な式であるが）に含まれる同一の自由変数に同一の数字を代入することにより，この証明図は自由変数を全く含まない素論理式だけから成り立っており，真か偽かは必ず決定さ

れるものばかりとなる．ところでこの証明図は $(\rightarrow w)$，$(w \rightarrow)$ は含まず，構造に関する推論だけから成り立っており，始式は真な式ばかり，終式は矛盾の式 $\rightarrow$ であるから，したがって上式が真で，下式が偽であるような推論規則が証明図のどこかに存在することになる．しかしこのようなことはありえない．

qed

（ii） さて目的とする（命題）を証明するわけであるが，いま扱っている証明図にあらわれる cut のうち，次の二つの条件 ①，② を満足するものを考える．

① cut に属する左または右の鎖のうち少なくも一方を上にたどれば（終式部分を定めるような）論理記号に関する推論規則の主論理式にいたり，② その cut の下式に含まれるどんな論理式についても，この論理式に属する鎖は決して（終式部分を定めるような）論理記号に関する推論規則の主論理式にはいたらない．

①，② をみたす cut については 次の（1），（2）が証明できる．

「（1） ①,② をみたす cut はいま扱っている証明図の中に少なくも1つ存在し，（2） このような cut のうち一番上に現われる（それより上にこのようなものが現われない）一つが（命題）で得ようとする論理式の鎖である」

（1）の証明 ①をみたす cut が ② をみたさないとすればその cut より下方に①をみたす cut があるから，これを繰り返すことにより最後には②をもみたすような cut に到達する（もしそうでないとすれば証明図に cut が無限個存在することになり不合理）．

（2）の証明 ①，② をみたす cut のうち一番上に現われる cut の1つを c_1 とし，c_1 に属する左または右の鎖を考えると，いずれか一方は上部で終式部分を定めるような推論規則の主論理式で終わることは①より明らかである．

ところで他方（たとえば右辺）についても同じような性質の成り立つことが②の条件および（2）を用いて次のように証明することができる．

まず他方の副論理式 $\mathfrak{D}$ の上部の鎖の一番上にある論理式 $\mathfrak{D}$ がどこに現われているかで分類すると i）終式部分の境となっている式より下方で導入 ii）終式部分の境となっている式で導入 iii）終式部分の境となっている式より上方で導入，の三とおりにわかれる．しかし i）の場合には $\mathfrak{D}$ は終式部分

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\overline{\Gamma_1 \to \Delta_1, \mathfrak{D}} & & \overline{\mathfrak{A}, \Sigma_1, \mathfrak{D}, \Pi_1 \to \Lambda_1} \\
\vdots & & \vdots \\
 & \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Sigma_2, \mathfrak{D}, \Pi_2 \to \Lambda_2}{\Gamma_2, \Sigma_2, \mathfrak{D}, \Pi_2 \to \Lambda_2}\ (\text{cut } c_2) & \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$
\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\ (\text{cut } c_1)
$$

の内部で（$w\to$）により導入されたことになり矛盾，また iii）の場合には境界は論理記号に関する推論規則でその主論理式 $\mathfrak{A}$ は別な鎖を生じ，下方の cut c_1 より上の cut で終わることになる（c_2 が c_1 の下方にあれば c_1 が条件②をみたすことに反する）．したがって（1）の場合と同じようにして c_1 より上部に①および②をみたす cut があることが証明され，始めの c_1 がこのような性質をもつ一番上のものであったこと（2）に反する．したがって残るは ii）の場合のみであり，問題となっている他方の（右の）鎖が終式部分の論理記号に関する推論規則の主論理式として導入されていることが証明できた． *qed*

2. 論理変形　論理変形を与えるまえに，証明図に現われる式の高さという概念を定義しよう．

定義 2　証明図中の式 S の**高さ** (height) とは，証明図の中で式 S より下に現われる cut または VJ-推論規則（より精しくは cut または VJ-推論規則の下式が S の下にある）の grade の最大値をいう．またこのような cut も VJ-推論規則もないとき，式 S の高さは 0 であると定義する．

さて前項 1 より → を終式とする問題の証明図が与えられたとし，それの終式部分は少なくとも一つの次のような cut を含み，その左の鎖および右の鎖を上方にたどるといずれも（終式部分を定めるような）論理記号に関する推論規則の主論理式で終わっている．このような cut の一つに目をつけよう．この cut の副論理式は　論理記号を含んでいるから，一番外側の記号によって分類することになるが考え方はいずれも同様であるから，ここではまず一番外側の

記号が ∀ の場合について論理変形を述べよう．

さて証明図は次のような形をしていると考えられる．

(a)

$$\frac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}(\to\forall) \qquad \frac{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2 \to \Theta_2}(\forall\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x) \qquad \forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ \text{cut} \qquad \text{高さ } \rho$$

$$\frac{\qquad}{\Gamma_3 \to \Theta_3}\ \text{等高線} \qquad \begin{array}{l}\text{高さ } \rho \\ \text{高さ } \sigma(<\rho)\end{array}$$

$$\frac{\qquad}{\to}$$

ここで n は数字を表わしている．なぜなら n は (∀→) より下で eigenvari-able として用いられていないから，すでに述べた自由変数のおきかえによって自由変数はなくなっているからである．

$\Gamma_3 \to \Theta_3$ は，$\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ から終式の → まで糸をたどるとき，cut の上式の高さ ρ より小さい高さをもつ式の最初のものを表わしている．このとき $\Gamma_3 \to \Theta_3$ を下式とする推論の横線を**等高線** (Höhenlinie) という（終式の高さは 0，また cut の上式の副論理式 $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ は少なくも一つ論理記号は含んでおり，$\rho \geq 1$ であるから $\Gamma_3 \to \Theta_3$ は必ず存在する．ただし $\Gamma_3 \to \Theta_3$ は $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ と一致することもあり，また → と一致することもありうる)．

左側の糸の上部に (a) と書いたのは，$\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)$ の証明図に自由変数 a が現われていることを示している．終式部分の最も上の式は $\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)$ および $\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2 \to \Theta_2$ である．

さて，これを次のような形に変形することを（∀についての）**論理変形**という．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\;(n)}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(n)}}{\Gamma_1 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)} \atop \vdots}{\Gamma \to \mathfrak{F}(n), \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2 \to \Theta_2} \atop \vdots}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta \to \Lambda}
$$

$$
\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(n), \Theta, \Lambda
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_3}}{\Gamma_3 \to \Theta_3, \mathfrak{F}(n)}
\qquad \begin{matrix}\text{高さ } \rho \\ \text{高さ } \tau \\ \text{高さ } \tau\end{matrix}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\;(a)}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)} \atop \vdots}{\Gamma \to \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}}{\forall x\ \mathfrak{F}(x), \Gamma_2, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_2} \atop \vdots}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta, \mathfrak{F}(n) \to \Lambda}
$$

$$
\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(n) \to \Theta, \Lambda
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_3}}{\mathfrak{F}(n), \Gamma_3 \to \Theta_3}
\qquad \begin{matrix}\text{高さ } \rho \\ \text{高さ } \tau \\ \text{高さ } \tau\end{matrix}
$$

新しい cut:

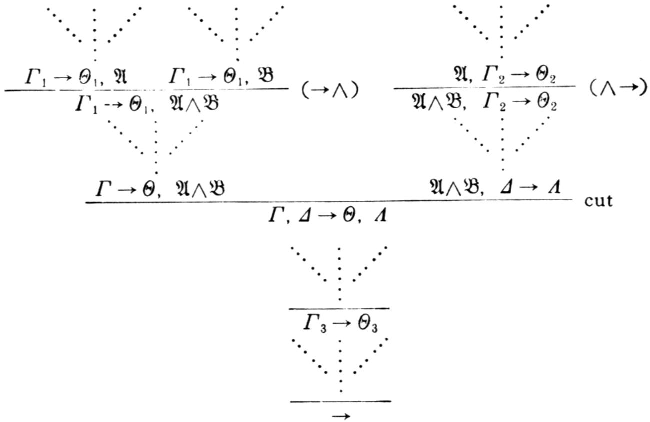
$$
\dfrac{\Gamma_3 \to \Theta_3, \mathfrak{F}(n) \qquad \mathfrak{F}(n), \Gamma_3 \to \Theta_3}{\dfrac{\Gamma_3, \Gamma_3 \to \Theta_3, \Theta_3}{\Gamma_3 \to \Theta_3}}
\qquad \begin{matrix}\text{高さ } \sigma \\ \text{高さ } \sigma\end{matrix}
$$

$$
\dfrac{\vdots}{\to}
$$

ここで ═══ で表わしてあるのは，一番上の部分では $(\to w)$, $(w \to)$; $(\to e)$, $(e \to)$ を，$\Gamma_3 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_3$ および $\Gamma_3, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_3$ の下では $(\to e)$, $(e \to)$ を，また一番下の部分では $(\to c)$, $(c \to)$; $(\to e)$, $(e \to)$ をそれぞれ必要な回数だけ用いることを示している．また一番左側の糸の上部に現われる式 $\Gamma_1 \to \Theta_1$, $\mathfrak{F}(n)$ の上には，もとの $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)$ の証明図に現われる a をすべて数字 n でおきかえたものを書くこととする（ただし $\Gamma_1 \to \Theta_1$, $\mathfrak{F}(a)$ の証明図の中で，a がさらに別の推論規則の eigenvariable として用いられていることはないものとする）．

この論理変形によりもとの証明図は変形されるがやはり $\to$ を終式とする新しい証明図となっていることは容易にわかる．

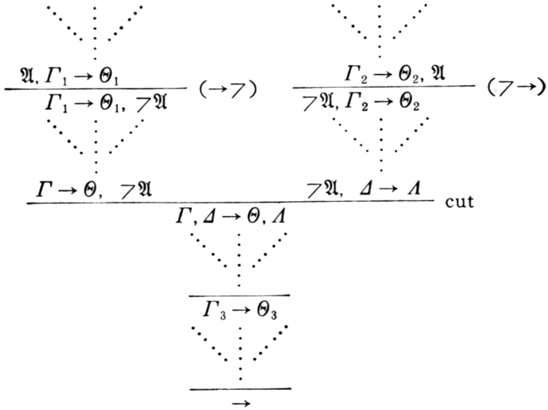
次に一番外側の記号が $\wedge$ および $\neg$ のときについても簡単に述べておく．一番外側の記号が $\wedge$ のとき，証明図は次のような形をしている．



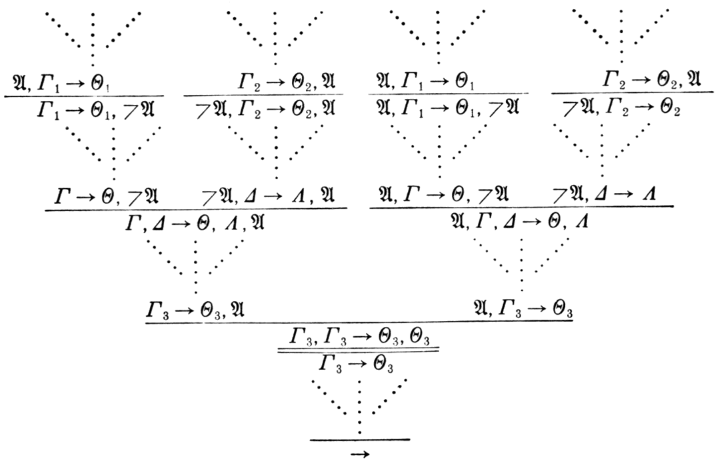
これに対し，$\wedge$ についての論理変形を行なった結果を次のように定める．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A}}{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}}{\dfrac{\Gamma,\ \Delta \to \mathfrak{A},\ \Theta,\ \Lambda}{\dfrac{\Gamma_3 \to \mathfrak{A},\ \Theta_3}{\Gamma_3 \to \Theta_3,\ \mathfrak{A}}}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A} \quad \Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}} \quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Gamma_2,\ \mathfrak{A} \to \Theta_2}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Delta,\ \mathfrak{A} \to \Lambda}}{\dfrac{\Gamma,\ \Delta,\ \mathfrak{A} \to \Theta,\ \Lambda}{\dfrac{\Gamma_3,\ \mathfrak{A} \to \Theta_3}{\mathfrak{A},\ \Gamma_3 \to \Theta_3}}}}{\dfrac{\dfrac{\Gamma_3,\ \Gamma_3 \to \Theta_3,\ \Theta_3}{\Gamma_3 \to \Theta_3}}{\to}} \text{ 新しい cut}$$

また一番外側の記号が⌐のとき，証明図は次のような形をしている.



これに対し，⌐についての論理変形を行なった結果を次のように定める.



C. 自然数論の無矛盾証明

有限の立場における順序数（最初の ε 数 ε_0 以下の）の定義および二つの順序数 α, β の自然和 $\alpha \# \beta$ についてはすでに 3.4 節で述べた. 順序数の集合

$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ が $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ を満足するとき，集合 $\{\alpha_\nu\}$ は明らかに有限集合である．さて，このことを用いて自然数論の無矛盾証明を完結することができる．

すなわち，すべての証明図から順序数へのある一意対応が定義され，次のことが成り立つとする．

「5·2 節A項で述べたように → に対する証明図が与えられたとし，この証明図に論理記号に関する推論規則または VJ-推論規則のいずれかが用いられているならば，5·2 節B項の推論規則の変形を用いて，この証明図を順次変形し，上に述べた推論規則が残っている限り続ける．このとき各段階の変形で変形後の証明図に対する順序数は，もとの証明図に対する順序数より小さくなるよう対応づけが定義できる」

このとき上に述べたように → にいたる証明図が与えられたとすれば，順次変形された証明図の列に対し，しだいに減少して行く順序数の系列を対応させることができるから，上に述べた順序数の性質より，いま考えている証明図の列は有限で終わることが証明される．すなわちいずれにしても論理記号に関する推論規則および VJ-推論規則を全く含まないような証明図がえられ，さらに準備的な変形 c を用いると論理的始式，$(\rightarrow w)$，$(w\rightarrow)$ もなくすることができるから，結局数学的始式から始まり構造に関する推論規則だけを用いて→にいたる証明図がえられることになる．したがって真な式から偽な式を導くような推論規則の存在を主張することになり不合理である．すなわち $\mathfrak{S}$ の無矛盾性の証明が終わったことになる．

したがって以下では順序数の証明図への対応の定義（a）およびこの対応により各段階の変形で順序数が減少すること（b）を示そう．

a．順序数の証明図への対応づけ　推論規則はすべて上式と下式とからできているが，上式と下式の間に書かれた横線をこの**推論の横線**(schlußstrich) とよぶことにする．証明図は式および推論の横線から組み立てられているといえる．さて証明図が任意に一つ定められたとしよう．この証明図に対応する順序数を定義するには，まず一番上の式よりはじめ，証明図に現われる各式および推論の横線のおのおのに順序数を次のように対応させることによって定める．

定義 3　始式には順序数 1（すなわち ω^0）を対応させる．

2. 推論規則の上式に順序数が対応しているとき，この推論の横線には次の順序数を対応させる．すなわち推論規則が

i）構造に関する推論規則のとき，この推論の横線には上式と同じ順序数を対応させる．

ii）cut のとき，左，右の上式にそれぞれ順序数 α および β が対応しているならば，cut の横線には自然和 $\alpha \# \beta$ を対応させる．

iii）論理記号に関する推論規則のとき，上式が一つの場合これに順序数 α が対応していれば，この推論の横線には $\alpha+1$ を対応させる．また，上式が二つの場合，上式に対応するそれぞれの順序数の大きい方（等しい場合も含めて）を α とすれば，この推論の横線には $\alpha+1$ を対応させる．

iv）VJ-推論規則のとき，上式に順序数 $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}(\nu\geqq 1, \alpha_1\geqq\cdots\geqq\alpha_\nu)$ が対応しているならば，この推論の横線には ω^{α_1+1} を対応させる（$\alpha_1=0$ のときは ω^1 を意味するものとする）．

3. 推論の横線に対し，上に述べた 2. によってすでに順序数 α が対応しているとき，この推論規則の下式には次の順序数が対応する．すなわち，上式の高さを ρ としたとき，下式の高さを $\rho-n\,(n\geqq 0)$ とすれば，下式には順序数

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}} \quad (\omega \text{の個数は } n \text{ 個})$$

を対応させる（したがって下式の高さが ρ, $\rho-1$, $\rho-2$, … のとき，下式に対応する順序数はそれぞれ

$$\alpha,\quad \omega^{\alpha},\quad \omega^{\omega^{\alpha}},\ \cdots$$

である）．

4. 以上 1.～3. によって始式から次々と順序数を対応させるとき，終式に対応する順序数をこの**証明図に対する順序数**という．

b．変形の有限性証明　まず始めに → に対する証明図が与えられたとし，これにある一つの順序数が対応しているとする．この証明図に 5.2 節 B 項の推論規則の変形（a）～（d）を順次行なうとき，対応する順序数が減少することを証明すればよい．そのため変形を行なう順序を次のように定める．

→ にいたる与えられた証明図が，論理記号に関する推論規則および VJ-推

論規則を含んでいるとし，次の二つの場合にわける．

（1） 終式部分に VJ-推論規則がある場合

（2） 終式部分に VJ-推論規則はなく，証明図の中に論理記号に関する推論規則がある場合

それぞれの場合について変形された証明図を次のようにして作る．

（1）の場合

（a）により eigenvariable 以外のすべての自由変数を消去したのち

（b）により終式部分の VJ-推論規則の1つを消去する

（2）の場合

（c）により終式部分の $(\rightarrow w)$, $(w \rightarrow)$ および論理的始式を消去し

（d）により論理記号に関する推論規則を消去する

この変形により，（1）の場合では変形（a）によって順序数は変わらず，変形（b）によって順序数は減少し，また（2）の場合では変形（c）によって順序数は増加せず，変形（d）により順序数は減少することが証明できる．したがって，（1），（2）のいずれの場合にも変形によって得られる証明図の順序数は減少することが示される．

以下では（a）〜（d）のおのおのの場合について上のことを逐一調べて行くことにする．まず（a）の自由変数のおきかえに対しては証明図に対応する順序数は不変である．なぜなら，証明図中における自由変数のおきかえによって証明図を構成するおのおのの推論規則は順序まで含めてもとのままだからである．したがって以下では（b），（c），（d）の各変形について考える．

（VJ-変形）

VJ-推論規則

$$\frac{\mathfrak{F}(a),\, \Gamma \rightarrow \Theta,\, \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(0),\, \Gamma \rightarrow \Theta,\, \mathfrak{F}(n)}$$

の上式に対応する順序数を $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$ $(\nu \geqq 1,\ \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu)$ とし，また上式の高さを ρ とする．このときこの推論の横線には ω^{α_1+1} が対応する．またこの推論規則の下式の高さもまた ρ である（なぜなら $\mathfrak{F}(0)$ および $\mathfrak{F}(n)$ に属する鎖の一番下には cut が必ず存在し，この cut といま扱っている VJ-推論規則とは grade が同じであるから）．したがって下式には ω^{α_1+1} が対応している．

さて VJ-変形によって得られる新しい証明図の順序数を $n \neq 1$ の場合について計算してみよう．

VJ-変形の後一番上に現われる式 $\mathfrak{F}(0)$, $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(0')$　$\mathfrak{F}(0')\Gamma \to \Theta$, $\mathfrak{F}(0'')$　$\mathfrak{F}(0'')$, $\Gamma \to \Theta$, $\mathfrak{F}(0''')\cdots$ などに対応する順序数はいずれも同じく $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$, $(\alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu)$ である．また変形後 $\mathfrak{F}(0)$, $\Gamma \to \Theta$, $\mathfrak{F}(0')$ から $\mathfrak{F}(0)$, $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(n)$ までの間に現われる式の高さは変形前の高さと同じく ρ である（変形によって新しく cut が現われるけれども，これらの新しい cut はもとの VJ-推論規則と同じ grade である）．したがって変形後一番下にくる式 $\mathfrak{F}(0)$, $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(n)$ に対応する順序数は $\omega^{\alpha_1}\cdot n+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}\cdot n$ であり，したがって ω^{α_1+1} より小さくなる．ただし 0 でない順序数 α, β, γ については，$\alpha<\beta$ ならば $\omega^\alpha<\omega^\beta$ および $\alpha \# \gamma<\beta \# \gamma$ が成り立つという順序数の性質を用いている．

$n=0$ の場合には，もとの VJ-推論規則の下式に対応する順序数は定義より少なくも ω^1 である．この場合の VJ-変形は

$$\frac{\mathfrak{F}(0) \to \mathfrak{F}(0)}{\mathfrak{F}(0),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(0)}$$

であるから，これの下式には順序数 1 が対応し，明らかに順序数は小さくなりしたがって証明図全体の順序数も減少する．

（準備的な変形）　準備的な変形，すなわち証明図を変形して $(\to w)$, $(w\to)$ および論理的始式をとり除く操作によって，みかけ上は証明図は簡単になるけれども，変形によって cut が消去される場合には高さが影響をうけるので外見ほど簡単ではなく，この場合が最も面倒である．しかしこの場合変形によってはじめの証明図に対応する順序数は増加しないことが証明される．

まず，$(w \to)$ または $(\to w)$ の主論理式が下方で $(c \to)$ または $(\to c)$ の主論理式に鎖としてつながっている場合の変形については，一般に cut 以外の構造に関する推論規則を付け加えたりとり除いたりすることによって順序数は全く不変であるから，証明図の順序数は明らかに不変である．

また，$(w \to)$ または $(\to w)$ の主論理式が直接 cut の副論理式につながっている場合の変形については，もとの証明図が 133 頁の上部に与えられた形のとき，変形後一番下の cut が消去されることになるが，cut の消去により残るすべての式の高さが不変の場合には，$\varDelta \to \varLambda, \mathfrak{A}$ および $\mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi$ に対応する

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \Lambda, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}\ (w \to)}{\vdots}\ \ \mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi}{}}{\Delta, \Sigma \to \Lambda, \Pi}\ \text{cut}$$

順序数をそれぞれ α, β とすると，$\Delta, \Sigma \to \Lambda, \Pi$ には順序数 $\alpha \# \beta$ が対応するが，変形後には Δ, $\Sigma \to \Lambda$, Π には β が対応することになるから順序数はたしかに減少する．

したがって問題になるのは上の場合 cut の消去によって高さの変わるような式が存在する場合である．実は問題の cut の上式および下式の高さが異なる場合（上式の高さのほうが大きいが）がこれにあたるので，この場合について調べよう．証明すべきことは次の（命題 I）の形に述べることができる．

「いま扱っている cut の上式および下式の高さをそれぞれ ρ, σ とし $\rho > \sigma$ であるとき，問題の変形によって順序数は増加しない」……（命題 I）

問題の変形——すなわち，$(w \to)$ の主論理式およびこれの属する鎖を除き，cut の左上式およびそれの上部をすべて除くこと——によって与えられる証明図を P とし，またもとの証明図の中で $\mathfrak{A}$, $\Sigma \to \Pi$ の上にある証明図の部分を Q とする．

Q において変形の前に高さが ρ より大きいような式の全体を E_0 とする．問題の変形によって E_0 の式の高さおよび順序数はともに不変である（なぜなら，E_0 の式 S の高さ μ ($> \rho$) は S の下に現われる cut の grade の最大数であるが，この cut は変形後も同じ性質をたもっているからである．また始式から式 S までの間の推論規則は $(w \to)$ 以外は変形によって不変であるから順序数の不変も明らかである)．

次に，Q において変形の前に高さがちょうど ρ であるような式の全体を E とする．問題の変形後 E の式 S の高さを h とすれば，$\rho \geqq h \geqq \sigma$ が成り立つ（なぜなら，S の下方にある cut の grade は 1 つを除きその他はすべてもとのままだから $\rho \geqq h$ である．$h \geqq \sigma$ は明らか)．したがって変形の後 E の式は n とおりの高さにわかれるものとし，それぞれの高さを ε_1, ε_2, …, ε_n（ただし $\rho \geqq \varepsilon_i \geqq \sigma$)，また変形後の高さが ε_k であるようなもとの式の全体を E_k で表わすこ

とにする.

さていま 次の（命題 II）が成り立つと仮定しよう（(命題 II）の成り立つことはすぐあとで証明する).

「集合 E_k に属する式 S の変形前および変形後の順序数をそれぞれ β および β' とすれば，次の不等式が成り立つ.

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right. \geqq \beta' \quad (\omega \text{の個数は } \rho-\varepsilon_k \text{ 個})$$

」……（命題II）

（命題II）を仮定すると（命題 I）は次のようにして導かれる.

いま扱う cut

$$\frac{\Delta \to \Lambda, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi}{\Delta, \Sigma \to \Lambda, \Pi}$$

の二つの上式の高さは ρ，下式の高さは $\sigma(<\rho)$ で左上式，右上式および下式の順序数をそれぞれ β_1, β_2, α とし，また変形後えられた推論

$$\frac{\Sigma \to \Pi}{\overline{\Delta, \Sigma \to \Lambda, \Pi}}$$

の上，下式の順序数をそれぞれ β_2'，α' とする．$\mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi$ の高さは変形前は ρ であるから E に属している．したがって，ある番号 k_0 が存在して $\mathfrak{A}, \Sigma \to \Pi$ は E_{k_0} に属している．すなわち変形後の $\Sigma \to \Pi$ の高さは ε_{k_0} である．ところで変形後の $\Delta, \Sigma \to \Lambda, \Pi$ の高さは（変形前と同じく）σ であり，これは $\Sigma \to \Pi$ から（cut 以外の）構造に関する推論規則だけで導かれるから，$\Sigma \to \Pi$ の高さもまた σ である．ゆえに $\varepsilon_{k_0} = \sigma$

したがって（命題II）を用いると

$$\alpha = \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta_1 \# \beta_2}}}}}\right\}\rho-\sigma \quad \geqq \quad \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta_2}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_{k_0} \quad \geqq \beta_2' = \alpha'$$

すなわち $\alpha \geqq \alpha'$ が示された. *qed*

さて（命題II）の成り立つことを証明しよう.

S を E_k に属する式とする．S が始式のとき $\beta = \beta'$ であるから明らかに命題IIの不等式は成り立つ．次に S が始式でないとき，S がどんな種類の推論規

則の下式になっているかに応じて場合分けをする．このときSの上式については不等式はすでに成り立っていると仮定し，Sについてもまた成り立つことを示す．

1°　Sが cut 以外の構造に関する推論規則の下式であるとする．この場合，Sの上式の変形前および変形後の順序数をそれぞれ γ, γ' とすると，γ, γ' については仮定の不等式

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \quad \geqq \gamma'$$

が成り立っている．ところで $\beta=\gamma$, $\beta'=\gamma'$ であるから下式Sの順序数 β, β' についても不等式は成り立つ．

2°　Sが論理記号に関する推論規則の下式であるとする．

①　Sの上式が1つのとき，上式の変形前後の順序数 γ, γ' について仮定の不等式が成り立つとし，下式Sの順序数 $\beta(=\gamma+1)$, $\beta'(=\gamma'+1)$ について成り立つことを示せばよいが

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k > \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \geqq \gamma' \quad \text{および} \quad \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k > 1$$

より

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k > \gamma'+1=\beta'$$

をうる．

②　Sの上式が2つのとき，2つの上式の変形前後の順序数 γ_1, γ_2 および γ_1', γ_2' に対し，$\gamma_1 \geqq \gamma_2$, $\gamma_1' \geqq \gamma_2'$ とすれば $\beta=\gamma_1+1$, $\beta'=\gamma_1'+1$ である．このときは上の①の証明でγを γ_1 でおきかえればよい．また $\gamma_1' \leqq \gamma_2'$ のときは $\beta=\gamma_1+1$, $\beta'=\gamma_2'+1$ であるがこのときはγを γ_2 でおきかえればよい．

3°　Sが cut の下式であるとする．この cut の左上式，右上式をそれぞれ S_1 および S_2 とし，変形の前後における左上式，右上式および下式の順序数

をそれぞれ γ_1, γ_2, β および γ_1', γ_2', β' とする.

① S_1, S_2 が E_0 に属し，S が E_k に属する場合　このとき S_1, S_2 は E_0 に属することより $\gamma_1=\gamma_1'$, $\gamma_2=\gamma_2'$ である．変形前の S_1, S_2 の高さは $\mu\ (>\rho)$, S の高さは ρ であり，変形後の S_1, S_2 の高さは μ, S の高さは $\varepsilon_n\ (\leqq\rho)$ であるから

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \geqq \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1\#\gamma_2}}}}\right\}\mu-\rho}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k = \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1'\#\gamma_2'}}}}}\right\}\mu-\varepsilon_k = \beta'$$

② S_1, S_2 が E_l に属し，S が $E_k\ (\varepsilon_l\geqq\varepsilon_k)$ に属する場合　変形前の S_1, S_2 および S の高さはいずれも ρ であるから $\beta=\gamma_1\#\gamma_2$ である．また帰納法の仮定より

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_i}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_l \geqq \gamma_i' \qquad (i=1,2)$$

であるから

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1\#\gamma_2}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_l > \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_i}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_l \geqq \gamma_i'$$

ゆえに

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1\#\gamma_2}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_l > \gamma_1'\#\gamma_2'$$

したがって

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k = \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1\#\gamma_2}}}}\right\}\rho-\varepsilon_l}}}}\right\}\varepsilon_l-\varepsilon_k > \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_1'\#\gamma_2'}}}}}\right\}\varepsilon_l-\varepsilon_k = \beta'$$

4°　S が VJ-推論規則の下式であるとする　この場合 S の上式の高さも ε_k

である 上式の変形前後における順序数を $\gamma=\omega^{\alpha_1}+\cdots$, $\gamma'=\omega^{\alpha_1'}+\cdots$ とすれば $\beta=\omega^{\alpha_1+1}$, $\beta'=\omega^{\alpha_1'+1}$ である．帰納法の仮定より

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \geqq \gamma'$$

であるから

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k = \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \geqq \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\alpha_1+\cdots}}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k \geqq \omega^{\alpha_1'}+\cdots>\omega^{\alpha_1'}$$

一方

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k>\alpha_1' \text{ および } \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k>1 \text{ より } \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k>\alpha_1'+1$$

をうるから

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}}\right\}\rho-\varepsilon_k > \omega^{\alpha_1'+1}$$

したがって，（命題II）の証明は終わった． *qed*

（論理変形） 一番外側の記号が∀である場合の論理変形について考えよう．変形によって順序数が減少することを示そう．

変形後の証明図において $\Gamma_3\to\Theta_3$, $\mathfrak{F}(n)$ および $\mathfrak{F}(n), \Gamma_3\to\Theta_3$ のすぐ上にある二つの推論の横線（これは等高線に対応する横線であるが）に対応する順序数をそれぞれ α_1 および α_2 とし，もとの証明図の等高線に対応する順序数を α とすれば $\alpha_1<\alpha$, $\alpha_2<\alpha$ が成り立つ．なぜなら変形後の $\Gamma_3\to\Theta_3$, $\mathfrak{F}(n)$ および $\mathfrak{F}(n), \Gamma_3\to\Theta_3$ の上部には，もとの証明図の $\Gamma_3\to\Theta_3$ の上部にあった推論がほとんどそのまま対応しており，とくに高さ ρ は変形後も不変である．しかし変形まえに（→∀），（∀→）のあった部分は，変形後にはそのいずれか一方を構造に関する推論規則でおきかえられているので，その部分については順序数はもとの順序数よりたしかに減少していることがわかる．したがってそ

の部分から下へ等高線までは減少した順序数が構造に関する推論規則でうけつがれることになるからである．

さらに式 $\Gamma_3 \to \Theta_3$ は変形後高さ σ $(\sigma<\rho)$ であり $\Gamma_3, \Gamma_3 \to \Theta_3, \Theta_3$ の高さも σ である．変形後現われる新しい cut の上式の高さを τ とすれば，$\rho>\tau\geqq\sigma$ が成り立つ．なぜなら，定義より τ は σ および $\mathfrak{F}(n)$ の grade の大きいほうである．したがって $\tau=\sigma$ ならば $\sigma<\rho$ であることより $\tau<\rho$，また τ が $\mathfrak{F}(n)$ の grade に等しいならば，$\mathfrak{F}(n)$ の grade は $\forall x\mathfrak{F}(x)$ の grade より小さく，また ρ は $\forall x\mathfrak{F}(x)$ の grade より小さくなることはないから $\tau<\rho$ いずれにしても $\rho>\tau$ である．$\tau\geqq\sigma$ は明らかであるから証明できた．

さて目的とする順序数の減少を証明するため，一番簡単な場合すなわち高さ ρ, τ, σ の差が最も少ない場合について証明しておく．したがって $\rho=\tau+1$, $\tau=\sigma$ としよう．

もとの証明図で等高線に対応する順序数は $\boldsymbol{\alpha}$ であった．$\Gamma_3 \to \Theta_3$ には順序数 ω^{α} が対応する．新しい証明図では等高線に対応する横線（すなわち $\Gamma_3 \to \Theta_3, \mathfrak{F}(n)$ および $\mathfrak{F}(n), \Gamma_3 \to \Theta_3$ のすぐ上の横線）は $\boldsymbol{\alpha}_1$ および $\boldsymbol{\alpha}_2$ $(\boldsymbol{\alpha}_1\geqq\boldsymbol{\alpha}_2$ とする）であり，ともに $\boldsymbol{\alpha}$ より小であることが示されていた．したがって新しい cut の上式には，それぞれ順序数 ω^{α_1} および ω^{α_2} が対応することとなり，$\Gamma_3\to\Theta_3$ には順序数 $\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}$ が対応する．しかし $\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}<\omega^{\alpha}$ であるから，$\Gamma_3\to\Theta_3$ に対する順序数は減少する．この変形前後の大小関係は $\Gamma_3\to\Theta_3$ から下に伝わり，証明図の順序数もまた変形後小さくなる．

高さ ρ, τ, σ のそれぞれの差が大きい場合にも同じような考察を行なうことができる．このときは不等式

$$\omega^{\alpha}>\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2} \quad (\alpha>\alpha_1\geqq\alpha_2)$$

のかわりに

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}\right\}\rho-\tau > \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1}}}}}\right\}\rho-\tau + \left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_2}}}}}\right\}\rho-\tau$$

の形の不等式を用いて証明されることになる．

なお一番外側の記号が $\forall$ 以外の場合についての論理変形に関しても，上と同じ考え方によって証明することができる．　*qed*

第6章 様 相 論 理

第6章は様相論理入門である．様相の論理はギリシャの昔から知られていたが，数理論理学として初めてとり扱ったのは Lewis および Langford である．6·1 節では様相論理の概観を与える．まず必然性や可能性などの様相概念がさして不自然なものでないということを具体例で示す．次に Lewis によって与えられた形式化と Lemmon による新しい形式化を紹介する．現在ではかなり多種の体系が研究されているがここでは数種の古典的なものに制限する．6·2 節では Gentzen の流儀で式の概念を用いてこれらの体系を形式化し，LK の場合と同様の基本定理を証明する．なお様相命題論理体系を述語へ拡張する一例を述べる．6·3 節では様相命題論理系の決定問題を扱う．数種類の方法がみいだされているが Gentzen 流の方法と真理表による方法を紹介する．ことに真理表による考え方は基本定理の考え方と密接な関係がある点でも興味がある．

6·1 様相論理概説

A．様相について

様相論理とは必然性や可能性などの様相とよばれる概念の導入された論理であるが，見方を変えればごく自然な論理体系と考えられるものである．はじめにある一つの立場から様相という概念をながめてみることにしよう．この項では厳密な議論は行なわない．

a．必然性　第3章で述べた論理体系 NK は，通常われわれが用いなれている論理をできるだけ忠実に形式化したものであったが，形式化の途中，最小論理，直観主義論理など NK の部分体系が定義された．一般にある体系 S と S' があって，S' で証明可能な論理式がすべて S で証明可能であるとき，S' を S の**部分体系** (subsystem)，S を S' の**拡大体系** (extension system) という．たとえば，直観主義論理 NJ は NK の推論規則の一部だけで定義されているから，NJ は NK の部分体系である．S' が S の部分体系であり，S が S' の部分体系でないとき，S' は S より**弱い体系**であるという．

いま NK で証明可能な一つの論理式 $\mathfrak{A}$ が与えられたとしよう．$\mathfrak{A}$ は NK で

証明可能であるが，$\mathfrak{A}$ はまた NK の任意の拡大体系においてまた証明可能であると考えられる．しかし通常われわれは $\mathfrak{A}$ が証明可能であるような一番弱い体系（ここでは NK）にとくに関心があるわけである．

これと同様のことを今度は $\mathfrak{A}$ の NK–証明図について考えてみよう．$\mathfrak{A}$ の証明図は NK の推論規則だけから成り立っているが，一般には NK の推論規則をすべて用いているわけではなく一部分だけを用いているにすぎない．この点から考えれば $\mathfrak{A}$ は正確には NK の部分体系（実は $\mathfrak{A}$ の証明図に用いられている推論規則だけで定義された体系）で証明可能である．したがって，$\mathfrak{A}$ は NK で証明可能であると同時に，より精しくは NK のある部分体系において証明可能というべきであろう．

第4章でみたように，$\to\mathfrak{A}$ が LK で証明可能であるといっても，実は $\to\mathfrak{A}$ が LJ で証明可能である場合もあり，一つの論理体系の中で弱い命題と強い命題の区別をすることが論理学の厳密な立場から必要なことがおこる．このような現象は論理学だけでなく数学においてもしばしば見られるものであり，第5章にもこのような例を見いだすことができる．一般の形式的体系では述語計算の体系以外に数学的公理が与えられており，数学的公理はとり扱うべき数学理論によって変化するものである．したがって数学的公理を用いないで導かれた論理式は，数学的公理を用いて導かれた論理式よりも，論理という立場からみれば「必然性」があるというべきであり，この両者を区別することは数学の中で用いられる論理の構造を調べる際，興味ある問題といえよう．

一般にある形式的体系 S が与えられ，その部分体系の一つを S' としたとき，S の論理式 $\mathfrak{A}$ が S' で証明可能であるとき，「$\mathfrak{A}$ は強い意味で証明可能である」とか「$\mathfrak{A}$ は必然的に成り立つ」ということにし，新しく論理記号 $\Box$ を導入して $\Box\mathfrak{A}$ で表わすことにする．すなわち，ある任意の命題論理系 S および S の任意の部分論理系 S' を固定したとき，$\mathfrak{A}$ が S' で証明可能であるとき，$\Box\mathfrak{A}$ は S で証明可能であると定義しよう．したがって次の関係が成り立つ．

$$S'\vdash\mathfrak{A} \Longleftrightarrow S\vdash\Box\mathfrak{A}$$

この定義をもとにして，論理記号 $\Box$ の S における二，三の性質を調べてみよう．

1) まず，S' は S の部分体系であるから，$\mathfrak{A}$ が S' で証明可能ならば $\mathfrak{A}$ は S で証明可能である．すなわち $\Box$ の定義より $S\vdash\Box\mathfrak{A} \Rightarrow S\vdash\mathfrak{A}$，したがって

S において次の推論規則

$$\frac{\square\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$$

が成り立つ．これは論理記号 $\square$ の除去についての規則であるから $\square_2$ と表わすことにしよう．

2) 次に，$\mathfrak{A}$ が S' で証明可能であるとすれば，$\mathfrak{A}$ は仮定 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ から S' の推論規則だけで導かれ，しかも $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ が S' で証明可能であることを表わしているから，$S\vdash\square\mathfrak{B}_1, \cdots, S\vdash\square\mathfrak{B}_n$，かつ $\mathfrak{A}$ が $\square\mathfrak{B}_1, \cdots, \square\mathfrak{B}_n$ から S' の推論規則（ただし，$\square$ についての推論規則は含まれる）だけを用いて導かれるならば，$S\vdash\square\mathfrak{A}$ が成り立つといいかえてもよい．このことを次のような形の推論規則で表わすことにする．

$$\frac{\begin{array}{c}[\square]\\ \hdashline \mathfrak{A}\end{array}}{\square\mathfrak{A}}$$

この規則は，$\mathfrak{A}$ が従属する仮定（ない場合もあるが）がもしあっても，一番外側の記号が $\square$ であるような形の理論式だけであり，しかも $\mathfrak{A}$ がこれらの仮定から S' の推論規則だけで導かれているときは，$\square\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示したものであり，これは論理記号の導入についての規則であるから $\square_1$ と表わすことにする．

さて命題計算 S に上述の二つの新しい推論規則 $\square_1, \square_2$ を付け加えれば S の拡大体系がえられる．このように論理記号 $\square$ の導入された論理体系を一般に**様相論理体系** (modal calculus) という．いまここに定義された S の拡大体系を仮に S^* と名付けておこう．

ここでは体系 S' は原始論理体系［3·2 節参照］とし，S' を含む任意の体系を S, S と S' で定められた様相論理体系を S^* とし S^* で成り立つ論理式を導く二，三の例を示そう．ただし S^* は S に新しい論理記号 $\square$ が導入されているから，S^* の定義のうち論理式の定義として

「$\mathfrak{A}$ が論理式ならば，$\square\mathfrak{A}$ もまた論理式である」

を付け加えておくことにする．また，S^* において $\square(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ を新しい論理記号 $\prec$ を用いて $\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$ と表わし，$\prec$ を**厳密含意** (strict implication) という．

注　論理式 $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ が S より弱い体系 S' で証明可能であるとき，$\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$ は S で証明可能であるというのである．

さて上に定義した S^* では次の論理式は証明可能である．

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A} \tag{6.1}$$

$$\Box\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A} \tag{6.2}$$

$$\Box\mathfrak{A} \prec \Box\Box\mathfrak{A} \tag{6.3}$$

$$(\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}) \prec (\Box\mathfrak{A} \prec \Box\mathfrak{B}) \tag{6.4}$$

証明は次のとおりである．

(6.1)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}}\,\supset_1\ 1}{\mathfrak{A}\prec\mathfrak{A}}\,\Box_1$$

(6.2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\Box\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}}\,\Box_2}{\Box\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}}\,\supset_1\ 1}{\Box\mathfrak{A}\prec\mathfrak{A}}\,\Box_1$$

(6.3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\Box\mathfrak{A}}}{\Box\Box\mathfrak{A}}\,\Box_1}{\Box\mathfrak{A}\supset\Box\Box\mathfrak{A}}\,\supset_1\ 1}{\Box\mathfrak{A}\prec\Box\Box\mathfrak{A}}\,\Box_1$$

(6.4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\Box\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}}\,\Box_2 \qquad \dfrac{\overset{2}{\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,\Box_2}{\mathfrak{B}}\,\supset_2}{\Box\mathfrak{B}}\,\Box_1}{\Box\mathfrak{A}\supset\Box\mathfrak{B}}\,\supset_1\ 1}{\Box\mathfrak{A}\prec\Box\mathfrak{B}}\,\Box_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\Box\mathfrak{A}\prec\Box\mathfrak{B}}{(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\supset(\Box\mathfrak{A}\prec\Box\mathfrak{B})}\,\supset_1\ 2}{(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\prec(\Box\mathfrak{A}\prec\Box\mathfrak{B})}\,\Box_1$$

b．可能性その他　S' にさらに否定 $\neg$ が導入されていて NJ における推論規則 $\neg_1$ および $\neg_2$ が成り立っていると仮定しよう．様相論理を形式的にとり扱う場合否定を表わす論理記号は慣例として $\sim$ を用いることが多いので，本章でも $\neg$ のかわりに $\sim$ を用いることにする．

S^* では否定について次の二つの論理式が証明できる．

$$\mathfrak{A} \prec \sim\sim\mathfrak{A} \tag{6.5}$$

$$(\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}) \prec (\sim\mathfrak{B} \prec \sim\mathfrak{A}) \tag{6.6}$$

証明は次の頁に示す．

(6.6) の証明において　上の方の $\Box_1$-推論規則の上式が従属している論理式は $\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$（一番外側に $\Box$ がついている）だけであるから $\Box_1$ を用いてよい．

下の方の $\Box_1$-推論規則の上式はすでに仮定がすべておちて S' で証明可能であるから $\Box_1$ がつかえる．

(6.5)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\sim\mathfrak{A}} \qquad \overset{2}{\mathfrak{A}}}{\text{人}}\sim_2}{\sim\sim\mathfrak{A}}\sim_1 {}^{1}}{\mathfrak{A}\supset\sim\sim\mathfrak{A}}\supset_1 {}^{2}}{\mathfrak{A}\prec\sim\sim\mathfrak{A}}\square_1$$

(6.6)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\overset{3}{\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\square_2}{\mathfrak{B}}\supset_2 \qquad \overset{2}{\sim\mathfrak{B}}}{\text{人}}\sim_2}{\sim\mathfrak{A}}\sim_1 {}^{1}}{\sim\mathfrak{B}\supset\sim\mathfrak{A}}\supset_1 {}^{2}}{\sim\mathfrak{B}\prec\sim\mathfrak{A}}\square_1}{(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\supset(\sim\mathfrak{B}\prec\sim\mathfrak{A})}\supset_1 {}^{3}}{(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\prec(\sim\mathfrak{B}\prec\sim\mathfrak{A})}\square_1$$

さて上に述べたように S^* では $\square\mathfrak{A}\prec\mathfrak{A}$ が成り立つから，$\mathfrak{A}$ に $\sim\mathfrak{A}$ を代入すれば $\square\sim\mathfrak{A}\prec\sim\mathfrak{A}$ も成り立つ．これら二つの論理式に (6.6) および (6.5) を用いると次の二つの論理式が証明可能となる．

$$\sim\mathfrak{A}\prec\sim\square\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A}\prec\sim\square\sim\mathfrak{A}$$

ここに現われた $\square\sim\mathfrak{A}$, $\sim\square\sim\mathfrak{A}$, $\sim\square\mathfrak{A}$ をそれぞれ，$\mathfrak{A}$ は**不可能** (impossible) である ($\sim\mathfrak{A}$ が強い意味で成り立つ)，$\mathfrak{A}$ は**可能** (possible) である ($\mathfrak{A}$ は不可能ではない)，および $\mathfrak{A}$ は**偶然的** (contingent) である ($\mathfrak{A}$ は必然的ではない) ということにする．

一般に命題変数 A に $\square$ または $\sim$ を有限回（0回も含め）ほどこしてできる論理式を**様相** (modality) といい，$\sim$ を偶数個（0を含め）含む様相を正の様相，奇数個含む様相を負の様相という．$\square A$, $\sim\square\sim A$ は正の様相，$\sim\square A$, $\square\sim A$ は負の様相であり，$\square$ を**様相記号** (modality symbol) という．

以上では原始的な様相記号として $\square$ をえらんできたが，様相論理体系を始めて数学的に研究した C. I. Lewis は $\sim\square\sim$ を記号 $\diamond$ で表わし，$\diamond$（可能性を表わす記号）を基本論理記号として古典論理の上に理論を展開した．また不可能を表わす記号 $\square\sim$ を基本論理記号としてえらぶこともできる．すでに述べたように $\square\sim\mathfrak{A}\prec\sim\mathfrak{A}$ が成り立つことから，$\mathfrak{A}$ が不可能であるという概念は単なる $\mathfrak{A}$ の否定よりも強い否定を表わしている．$\square\sim\mathfrak{A}$ を簡単に $-\mathfrak{A}$ と表わし，この記号 $-$ を基本論理記号にとることにすれば

$$\square\mathfrak{A}=\square\sim(\sim\mathfrak{A})=-\sim\mathfrak{A}$$
$$\sim\square\sim\mathfrak{A}=\sim(\square\sim\mathfrak{A})=\sim-\mathfrak{A}$$

であるから，$\square\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$, $\diamond\mathfrak{A}$ ($\square\mathfrak{A}\prec\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\prec\diamond\mathfrak{A}$ の関係は成り立っている) はそれぞれ否定 $\sim$ および不可能 $-$ を用いて

$$-\sim\mathfrak{A},\quad \sim\sim\mathfrak{A},\quad \sim-\mathfrak{A}$$

と二重否定の形に表わすことができる.

注 $(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A})$ を単に $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ と書き厳密な意味で同値であることを表わしている.

B. 様相論理の形式化

前項では様相論理体系についての一つの例を述べたが，1917 年 C.I. Lewis が初めて様相論理を数学的にとり扱って以来，すでに数十種におよぶ様相論理の体系が研究されている．いずれもまえに述べた S' が古典命題論理 PC を含むようにつくられていて，形式化された S^* は PC に様相記号を導入して PC を拡張した形になっている．ここでは Lewis による古典的な形式化および Lemmon による新しい形式化を紹介する.

注 命題計算 NK, LK などと同等な古典命題論理の体系を簡単に PC(propositional calculus) で表わす.

a. Lewis による形式化 ここでは C.I. Lewis によって定義された命題論理系 S1〜S5 をかなり変形した形で述べよう．記号，表現，公理，推論規則を次のように与える.

1. 命題変数 $A, B, C, \cdots$

   論理記号 $\sim$ (否定), $\wedge$ (論理積), $\Box$ (必然性) なお補助記号として ( ) を用いる.

2. 論理式の定義

   1) 命題変数は論理式である.

   2) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が論理式のとき，$\sim\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\Box\mathfrak{A}$ は論理式である.

   3) 以上 1), 2) で論理式とわかったものだけが論理式である.

   他の論理記号の定義 $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ および $\Diamond\mathfrak{A}$ をそれぞれ，$\sim(\sim\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$, $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$, $\Box(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A})$ および $\sim\Box\sim\mathfrak{A}$ で定義する.

注 論理記号の結合の強さは強いほうから $\sim$, $\Box$, $\Diamond$; $\vee$, $\wedge$; $\supset$, $\prec$; $\equiv$, $=$ の順とする.

3. 公理

   1. $A\wedge B\prec B\wedge A$

   2. $A\wedge B\prec A$

3. $A \prec A \wedge A$
4. $((A \wedge B) \wedge C) \prec (A \wedge (B \wedge C))$
5. $((A \prec B) \wedge (B \prec C)) \prec (A \prec C)$
6. $\Box A \prec A$
7. $\Box (A \wedge B) \prec \Box A$
8. $(A \prec B) \prec (\Box A \prec \Box B)$
9. $\Box A \prec \Box \Box A$
10. $\sim \Box \sim \Box A \prec \Box A$

4. 推論規則

α）代入規則（substitution rule） 証明可能な論理式に命題変数 A がいくつかの場所に現われているとき，すべての A に任意の一つの論理式を代入したものは，また証明可能な論理式である．

β）置換規則（replacement rule for＝） $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ が証明可能であるとき，証明可能な論理式 $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{B}$ を部分論理式として含んでいるならば，$\mathfrak{B}$ に $\mathfrak{A}$ を代入することによって $\mathfrak{C}$ からつくられる論理式は証明可能である．

γ）adjunction rule　$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ がともに証明可能ならば，$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ も証明可能である．

δ）modus ponens for $\prec$　$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ がともに証明可能ならば，$\mathfrak{B}$ も証明可能である．

5. 証明可能の定義

1）公理は証明可能である．

2）証明可能な論理式に推論規則 α)～δ）をほどこしてできる論理式は証明可能である．

3）1),2）で証明可能とわかったものだけが証明可能である．

定義 1　上の1～5で規定された体系で，とくに公理に関し，公理1～5をみたす様相論理系を S1° という（Feys）．S1° に公理 6, 7, 8, 9, 10 をそれぞれ付け加えてできる体系を，それぞれ順に S1, S2, S3, S4, S5 という．

注　たとえば公理として公理1～5および8をえらんだとき，この体系を様相命題論理系 S3 といい，論理式 $\mathfrak{A}$ が S3 で証明可能であるとき S3 ⊢ $\mathfrak{A}$（まぎらわしくなけ

れば単に $\vdash \mathfrak{A}$ とかく）で表わす．他の体系についても同様である．

Lewis のもとの公理系においては，$\sim\sim A=A$ は公理として採用されていたが，この論理式は実は公理 1，2，3，5 と推論規則 α)〜δ）から導かれることが証明されている (McKinsey)．この証明を目標にして以下で S1° における証明の例をあげよう．

1） $A \prec A$

①	$A \prec A \wedge A$	公理 3 による
②	$A \wedge A \prec A$	公理 2 に α）を用いる
③	$A \prec A$	①, ② に γ）を用い，また公理 5 に α）を用い δ）をつかう．

2） $A=A$ 　　1)を二回用い，＝の定義を用いる．

3） $\mathfrak{A}$ が定義により $\mathfrak{B}$ に等しければ $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ は証明可能である．

①	$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$	2）と α）による
②	$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$	① を用いる．

4） $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ が証明可能ならば $\sim\mathfrak{A}=\sim\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}=\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{B}$, $\Box\mathfrak{A}=\Box\mathfrak{B}$ は証明可能である． ∵ 2）より $\sim\mathfrak{A}=\sim\mathfrak{A}$ 　これに β）を用いると $\sim\mathfrak{A}=\sim\mathfrak{B}$ をうる． 他についても同様である．

5） $(\sim A \prec B)=(\sim B \prec A)$

①	$(\sim A\wedge\sim B)=(\sim B\wedge\sim A)$	公理 1 による
②	$\sim(\sim A\wedge\sim B)=\sim(\sim B\wedge\sim A)$	① と 4）による
③	$(\sim A\supset B)=(\sim B\supset A)$	⊃の定義（p.144↑8）による
④	$\Box(\sim A\supset B)=\Box(\sim B\supset A)$	③ と 4）による
⑤	$\sim A \prec B=\sim B \prec A$	$\prec$ の定義を用いる

6） $\sim\sim\sim A=\sim A$

①	$\sim A \prec \sim A$	1）による
②	$\sim\sim A \prec A$	5）に α）を用いる
③	$\sim\sim\sim\sim A \prec \sim\sim A$	② に α）を用いる
④	$\sim\sim\sim\sim A \prec A$	③ と ② に公理 5 を用いる
⑤	$\sim A \prec \sim\sim\sim A$	④ と 5）を用いる
⑥	$\sim\sim\sim A \prec \sim A$	② に α）を用いる

⑦ $\sim\sim\sim A=\sim A$ ⑤, ⑥ と＝の定義を用いる

7) $\sim\sim A=A$

① $\Box(\sim(A\wedge\sim A))$ 1) と $\prec$ および $\supset$ の定義を用いる

② $\Box(\sim(A\wedge\sim\sim\sim A))$ ① と，6) に β) を用いる

③ $\Box(A\supset\sim\sim A)$ ② と $\supset$ の定義を用いる

④ $A\prec\sim\sim A$ ③ と $\prec$ の定義を用いる

⑤ $\sim\sim A=A$ ④, 6) の ② と＝の定義を用いる

したがって，S1° において $\sim\sim A=A$ は証明可能であることが示された．

b．Lemmon による新しい形式化 Lewis による体系 S1～S5 はいずれも古典命題計算 PC を含んでいることが証明できる．すなわち論理式 $\mathfrak{A}$ が PC で証明可能ならば，$\mathfrak{A}$ は Lewis のどの体系においても証明可能であることがわかっている．このことから Lewis の体系を，PC に何らかの公理または推論の付け加えという形で形式化できれば取扱いにはなはだ好都合である．1951 年 von Wright は Feys と相前後してこのような形で S4, S5 を形式化することを試みたがそのとき S4 および S5 を特徴付ける公理を除き去った基礎になる体系として新しい様相命題論理系を提唱した．この体系を M となずける．

1957 年 Lemmon はこの考え方にもとずいて，S1～S5 および M を PC をもとにして少数の公理と推論規則を用いて統一的に形式化した．Lewis の定義との同値はかなり面倒であるから同値の証明は一切省略し，Lemmon による公理系を述べよう．

古典命題論理系 PC に次の変更を加える．

1. 記号としては新しく論理記号 $\Box$ を付け加える．
2. 表現としては論理式の定義に次のものを付け加える．

 「$\mathfrak{A}$ が論理式ならば，$\Box\mathfrak{A}$ もまた論理式である」

3. 公理としては PC の公理（PC のトートロジーの全体と思ってもよい）のほか次のものを付け加える．

$$\begin{cases} 1 & (A\prec B)\supset(\Box A\prec\Box B) \\ 1' & (A\prec B)\supset(\Box A\supset\Box B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 & \Box A \supset A \\ 3 & ((A \prec B) \wedge (B \prec C)) \supset (A \prec C) \\ 4 & \sim \Box \sim \Box A \supset \Box A \end{cases}$$

4. 推論規則としては PC の推論規則（代入の規則と modus ponens (MP) と思ってもよい）のほか次のものをつけ加える.

a　$\vdash \mathfrak{A} \Rightarrow \vdash \Box \mathfrak{A}$（トートロジーの規則）

a′　$\mathfrak{A}$ がトートロジーまたは公理のとき $\vdash \Box \mathfrak{A}$

b　$\vdash \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \vdash \Box \mathfrak{A} \prec \Box \mathfrak{B}$

b′　$\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \Rightarrow \vdash \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$

ただし $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ を部分論理式として含むような任意の論理式を表わす.

定義 2　*M* は古典命題論理系 PC に公理 1′ および 2，推論規則として *a* を付け加えた体系として定義される．同様にして S 1～S 5 の定義も次のように与えられる.

S 1	PC	a′	b′		2	3
S 2	PC	a′	b	1′	2	
S 3	PC	a′		1	2	
M	PC	a		1′	2	
S 4	PC	a		1	2	
S 5	PC	a		1	2	4

1 と 2 より 1′ が導かれるから，$\mathfrak{A}$ が M で証明可能ならば S 4 でも証明可能である．一般に体系 S_1 で証明可能であるような任意の論理式 $\mathfrak{A}$ が S_2 で証明可能であるとき $S_1 \Longrightarrow S_2$ と表わすことにすれば，上の諸体系の間の強弱関係は次のようになる.

$$\begin{array}{ccccccc} S1 & \Longrightarrow & S2 & \Longrightarrow & S3 & & \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & M & \Longrightarrow & S4 & \Longrightarrow & S5 \end{array}$$

これらの関係のうち，$S1 \Longrightarrow S2$ を導くのは少し面倒であるが，その他の部分については容易に確かめることができる．$S1 \Longrightarrow S2$ の証明は S 2 の公理 1′，2，推論規則 a′，b から公理 3 を導けばよい.

$((A \prec B)\wedge(B \prec C))\supset(A \prec C)$ の証明

① $(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$　PC のトートロジー（ただし $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ は PC の任意の論理式）

② $(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\prec(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$　①に a' を用いる

③ $\Box(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset\Box(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$　② に $1'$ と MP を用いる

④ $(\mathfrak{A}\prec(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\prec\mathfrak{C})$　$\prec$ の定義

⑤ $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$　PC のトートロジー

⑥ $(A\supset B)\prec((B\supset C)\supset(A\supset C))$　⑤ に a' を用いる

⑦ $(A \prec B)\supset((B\supset C) \prec(A\supset C))$　⑥ に $1'$ と MP を用いる

⑧ $(A\prec B)\supset((B\prec C)\supset(A\prec C))$　⑦ に $1'$ と MP を用いる

⑨ $(A\prec B) \prec((B\supset C)\prec(A\supset C))$　⑥ に b を用いる

⑩ $(\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B})\prec(\Box\mathfrak{A}\supset \Box\mathfrak{B})$　$1'$ に a' を用いる

⑪ $((B\supset C)\prec(A\supset C))\prec((B\prec C)\supset(A\prec C))$　⑩ より

⑫ $(A\prec B)\prec((B\prec C)\supset(A\prec C))$　⑨ と ⑪ に ⑧ を用いる

⑬ $((A\prec B)\wedge(B\prec C))\prec(A\prec C)$　⑫ と ④ より　*qed*

注　⑤ および ⑧ はそれぞれ次の推論

$$\frac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\quad\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\quad\text{および}\quad\frac{\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}\quad\mathfrak{B}\prec\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\prec\mathfrak{C}}$$

と同値である.

ここで Lemmon の体系から導かれる性質のうち，次の節で必要となるものを二，三述べておこう.

1.　$S2\vdash(\mathfrak{A} \prec(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C})$　(6.7)

① $(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$　p. 62 (3.9)

② $(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\prec(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})$　① に a' を用いる

③ $(\mathfrak{A}\prec(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\prec\mathfrak{C})$　② に $1'$ と MP を用いる

2.　$M\vdash \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A} \Rightarrow M\vdash \Box\mathfrak{B}\wedge \Box\mathfrak{C}\supset \Box\mathfrak{A}$　[6.1]

① $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}$　仮定

② $\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})$　① と PC の性質

③ $\mathfrak{B}\prec(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})$　a による

④ $\Box\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A})$　③ に $1'$ と MP を用いる

⑤ $\Box\mathfrak{B} \prec(\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A})$　④ に a を用いる

⑥ $(\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}) \prec (\Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A})$ 1′ に a を用いる

⑦ $\Box \mathfrak{B} \prec (\Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A})$ ⑤, ⑥ に公理 3 を用いる

⑧ $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \prec \Box \mathfrak{A}$ ⑦ と (6.7) より

⑨ $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A}$ ⑧ と 2 より

3. $\mathrm{S}4 \vdash \Box A \supset \Box\Box A$ (6.8)

① $((B \supset B) \prec B) \supset ((B \prec B) \prec \Box B)$ 1 の A に $B \supset B$ の代入

② $\Box B \supset ((B \prec B) \prec \Box B)$ 左辺に PC の性質

③ $B \prec B$ a より

④ $\sim(B \prec B) \supset \Box B$ ③ と PC の性質

⑤ $\Box B \supset \Box B$ トートロジー

⑥ $(\sim(B \prec B) \vee \Box B) \prec \Box B$ PC の性質

⑦ $\Box(\sim(B \prec B) \vee \Box B) \prec \Box\Box B$ 1 より

⑧ $((B \prec B) \prec \Box B) \supset \Box\Box B$ ⑦ と PC の性質

⑨ $\Box B \supset \Box\Box B$ ② と ⑧ と 3 より

4. $\mathrm{S}4 \vdash \Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \Rightarrow \mathrm{S}4 \vdash \Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A}$ [6.2]

① $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ 仮定

② $\Box\Box \mathfrak{B} \wedge \Box\Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A}$ [6.1], ① による

③ $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A}$ (6.8), ② による

5. $\mathrm{S}5 \vdash \Box \mathfrak{B} \supset \Box \mathfrak{C} \vee \mathfrak{A} \Rightarrow \mathrm{S}5 \vdash \Box \mathfrak{B} \supset \Box \mathfrak{C} \vee \Box \mathfrak{A}$ [6.3]

① $\Box \mathfrak{B} \supset \Box \mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}$ 仮定

② $\Box \mathfrak{B} \wedge \sim \Box \mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ ① と PC の性質

③ $\Box \sim \Box \mathfrak{C} \supset \sim \Box \mathfrak{C}$ 2 より

④ $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \sim \Box \mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ ②, ③ より

⑤ $\Box \mathfrak{B} \wedge \Box \sim \Box \mathfrak{C} \supset \Box \mathfrak{A}$ ④ と [6.2] より

⑥ $\Box \mathfrak{B} \supset (\sim \Box \sim \Box \mathfrak{C} \vee \Box \mathfrak{A})$ ⑤ と PC の性質

⑦ $\Box \mathfrak{B} \supset \Box \mathfrak{C} \vee \Box \mathfrak{A}$ ⑥ と 4 より

6・2 様相論理体系の基本性質

様相論理体系は現在すでにかなり多くの種類について調べられているが，ここでは Lewis の体系 S1～S5, Feys - von Wright の体系 M について述

べる．M, S 4, S 5 ではトートロジーの規則 a が成り立っているが，S 1, S 2, S 3 では弱い形 a' でしか成り立たず，様相論理の体系は大きくこの二種類に分けられる．後者は前者に比べ扱いにくい点が多い．ここでは sequential な扱い方（式の概念を用いる方法）について述べる．

A．様相論理系の sequential な形式化

a．M, S 4, S 5

（1） M は Gentzen の命題計算 LK を次のように拡大してえられる体系である．まず論理記号としては ∨, ∧, ∼, ⊃ のほか □ を付け加える．表現としては論理式の定義のうち「$\mathfrak{A}$ が論理式ならば，$\square\mathfrak{A}$ も論理式である」を付け加える．公理は LK の場合と同じく $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の形であるが，$\mathfrak{D}$ として □ を含むような論理式も許される．

推論規則としては，LK の推論規則 (→∧), (∧→); (→∨), (∨→); (→∼), (∼→); (→⊃), (⊃→) のほか，さらに次の推論規則 (→□), (□→) を付け加える．すなわち

$$\frac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to\Theta}{\square\,\mathfrak{A},\ \Gamma\to\Theta}\ (\square\to)\qquad\qquad \frac{\Sigma\to\mathfrak{A}}{\square\,\Sigma\to\square\,\mathfrak{A}}\ (\to\square)$$

ただし Σ が論理式の列 $\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ を表わすとき，$\square\,\Sigma$ は $\square\,\mathfrak{B}_1,\cdots,\square\,\mathfrak{B}_n$ をあらわすものとし，Σ が空のときは $\square\,\Sigma$ も空を表わすものとする．

この sequential な定義が Lemmon による M の定義と同値であることは次のようにして確かめられる．

まず Lemmon の体系で $\mathfrak{A}$ が証明可能ならば，sequential な体系で $\to\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示す．証明すべきことのうち M が PC を含むことは明らかであるから，推論規則 a および公理 1′ と 2 を示せば十分である．

推論規則 a

$$\frac{\to\mathfrak{A}}{\to\square\,\mathfrak{A}}\ (\to\square)$$

公理 1′

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A\qquad B\to B}{A\supset B,\ A\to B}\ (\supset\to)}{A\prec B,\ \square\,A\to\square\,B}\ (\to\square)}{A\prec B\to\square\,A\supset\square\,B}\ (\to\supset)}{\to(A\prec B)\supset(\square\,A\supset\square\,B)}\ (\to\supset)$$

公理 2

$$\dfrac{\dfrac{A\to A}{\Box\, A\to A}\,(\Box\to)}{\to\Box\, A\supset A}\,(\to\supset)$$

逆に，sequential な体系で $\to\mathfrak{A}$ が証明可能のとき，Lemmon の体系で $\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示すのに本質的な部分は，Σ が空でないときの$(\to\Box)$ を示すこと，すなわち，Lemmon の体系で $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}$ が証明可能のとき $\Box\mathfrak{B}\wedge\Box\mathfrak{C}\supset\Box\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示せば十分であるが，これはすでに [6.1] で証明ずみである．したがって二つの定義は（証明可能な論理式の集合が一致するという意味で）同値であることがわかった． *qed*

M では「$\Box$ の乗法性」についての次の論理式

$$\Box(A\wedge B)\equiv\Box\, A\wedge\Box\, B \tag{6.9}$$

が成り立つ．なぜなら，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A\wedge B\to A}\,(\wedge\to)}{\Box(A\wedge B)\to\Box\, A}\,(\to\Box)\qquad\dfrac{\dfrac{B\to B}{A\wedge B\to B}\,(\wedge\to)}{\Box(A\wedge B)\to\Box\, B}\,(\to\Box)}{\Box(A\wedge B)\to\Box\, A\wedge\Box\, B}\,(\to\wedge)}{\to\Box(A\wedge B)\supset\Box\, A\wedge\Box\, B}\,(\to\supset)$$

逆は，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A,\ B\to A}\,(w\to)\qquad\dfrac{B\to B}{A,\ B\to B}\,(w\to)}{A,\ B\to A\wedge B}\,(\to\wedge)}{\Box\, A,\Box\, B\to\Box(A\wedge B)}\,(\to\Box)}{\Box\, A\wedge\Box\, B\to\Box(A\wedge B)}}{\to(\Box\, A\wedge\Box\, B)\supset\Box(A\wedge B)}\,(\to\supset)$$

この二つの終式に $(\to\wedge)$ を用いれば (6.9) をうる．M では推論規則 **a** があるから $\to\Box(A\wedge B)=\Box\, A\wedge\Box\, B$ も証明可能である．

また，M では「双対性」が成り立つ．すでに述べたように（4.1 節参照）LK には双対性が成り立っているが，M において $\sim\Box\sim$ を $\Diamond$ で表わしたとき $(\Box\to)$，$(\to\Box)$ と否定に関する推論規則などを用いると，次の推論

$$\dfrac{\Theta\to\Gamma,\mathfrak{A}}{\Theta\to\Gamma,\Diamond\mathfrak{A}}\,(\to\Diamond)\quad\text{および}\quad\dfrac{\mathfrak{A}\to\Sigma}{\Diamond\mathfrak{A}\to\Diamond\Sigma}\,(\Diamond\to)$$

の成り立つことが容易にわかる．たとえば第一のものは

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Theta \to \Gamma,\ \mathfrak{A}}{\sim \mathfrak{A},\ \Theta \to \Gamma}\ (\sim\to)}{\Box \sim \mathfrak{A},\ \Theta \to \Gamma}\ (\Box\to)}{\Theta \to \Gamma,\ \sim \Box \sim \mathfrak{A}}\ (\to\sim)$$

とすればよいし第二のものも同様である．さて M における論理式を $\mathfrak{A}$ とし，$\mathfrak{A}$ は論理記号⊃を含まないとする．$\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ をそれぞれ $\vee$, $\wedge$, $\Diamond$, $\Box$ でおきかえて $\mathfrak{A}$ からできる論理式を $\mathfrak{A}$ に**双対な論理式**といい，$\mathfrak{A}'$ で表わす．このとき双対に関する次の定理が成り立つことが容易に示される．

定理 1　M で証明可能な任意の式を $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ とすれば，これに双対な式 $\mathfrak{B}_n', \cdots, \mathfrak{B}_1' \to \mathfrak{A}_m', \cdots, \mathfrak{A}_1'$ もまた M で証明可能である．

注　この定理は M に限らず S1～S5 でも成り立つ．

例　(6.9) に双対な論理式は $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$ となるがこれは「$\Diamond$ の加法性」をあらわしている．また $\Box A \to A$ に双対な式は $A \to \Diamond A$ である．

（2）　S4 は sequential な M の定義のうち，推論規則 $(\to\Box)$ を次のものでおきかえてえられる体系として定義される．

$$\frac{\Box \Sigma \to \mathfrak{A}}{\Box \Sigma \to \Box \mathfrak{A}}\ (\to\Box)$$

また S5 は sequential な M の定義のうち，推論規則 $(\to\Box)$ を次のものでおきかえてえられる体系として定義される．

$$\frac{\Box \Sigma \to \Box \Pi,\ \mathfrak{A}}{\Box \Sigma \to \Box \Pi,\ \Box \mathfrak{A}}\ (\to\Box)$$

S4, S5 いずれの $(\to\Box)$ においても，Σ, Π は空のこともゆるされる．

これらの定義が Lemmon による定義と同値であることを確かめておこう．sequential な体系 S4 から公理 1 を，S5 から公理 4 を導くのは

公理 1

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A \qquad B \to B}{A \supset B,\ A \to B}\ (\supset\to)}{A \prec B,\ \Box A \to B}\ (\Box\to)\text{ を 2 回用いる}}{A \prec B,\ \Box A \to \Box B}\ (\to\Box)}{A \prec B \to \Box A \supset \Box B}\ (\to\supset)}{A \prec B \to \Box A \prec \Box B}\ (\to\Box)}{\to (A \prec B) \supset (\Box A \prec \Box B)}\ (\to\supset)$$

$(\to\Box)$ はともに S4 の推論規則を用いる

公理 4

$$\begin{array}{ll} \Box A \to \Box A & \\ \hline \to \Box A,\ \sim \Box A & (\to\sim) \\ \hline \to \Box A,\ \Box \sim \Box A & (\to\Box) \\ \hline \sim \Box \sim \Box A \to \Box A & (\sim\to) \\ \hline \to \sim \Box \sim \Box A \supset \Box A & (\to\supset) \end{array}$$

(→□) は S5 の推論規則を用いる

とすればよい．

逆に Lemmon の体系で，推論規則（→□）の成り立つことを示すには，M の場合と同じように行なえばよい．S4 については [6.2] で，S5 については [6.3] で証明の本質的なところは終わっている．

次に S4 および S5 で証明可能な二，三の論理式をあげておく．

S4 で証明可能な論理式

$$\Box B \prec (A \prec \Box B) \tag{6.10}$$

$$(\Box A \wedge \Box B \prec \Box C) = (\Box A \prec (\Box B \prec \Box C)) \tag{6.11}$$

$$\Box (A \vee \sim A) = A \vee \sim A \tag{6.12}$$

$$\Diamond (A \wedge \sim A) = A \wedge \sim A \tag{6.13}$$

S5 で証明可能な論理式

$$\Box (\Box A \vee B) = \Box A \vee \Box B \tag{6.14}$$

$$\Box (\sim \Box A \vee B) = \sim \Box A \vee \Box B \tag{6.15}$$

証明はたとえば（6.11）の前半については

$$\begin{array}{ll} \vdots & \\ \hline \Box A, \Box B \to \Box A \wedge \Box B \qquad \Box C \to \Box C & \\ \hline \Box A \wedge \Box B \supset \Box C,\ \Box A,\ \Box B \to \Box C & (\supset\to) \\ \hline \Box A \wedge \Box B \prec \Box C,\ \Box A,\ \Box B \to \Box C & (\Box\to) \\ \hline \Box A \wedge \Box B \prec \Box C,\ \Box A \to \Box B \supset \Box C & (\to\supset) \\ \hline \Box A \wedge \Box B \prec \Box C,\ \Box A \to \Box B \prec \Box C & (\to\Box) \\ \hline \Box A \wedge \Box B \prec \Box C \to \Box A \supset (\Box B \prec \Box C) & (\to\supset) \\ \hline \Box A \wedge \Box B \prec \Box C \to \Box A \prec (\Box B \prec \Box C) & (\to\Box) \\ \hline \to (\Box A \wedge \Box B \prec \Box C) \supset (\Box A \prec (\Box B \prec \Box C)) & (\to\supset) \\ \hline \to (\Box A \wedge \Box B \prec \Box C) \prec (\Box A \prec (\Box B \prec \Box C)) & (\to\Box) \end{array}$$

また（6.14）の前半については

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \to \Box A}{\Box A \to \Box A,\ B}\,(\to w) \qquad \dfrac{B \to B}{B \to \Box A,\ B}\,(\to w)}{\Box A \vee B \to \Box A,\ B}\,(\vee\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box A \vee B \to \Box A,\ B}{\Box(\Box A \vee B) \to \Box A,\ B}\,(\Box\to)}{\Box(\Box A \vee B) \to \Box A,\ \Box B}\,(\to\Box)}{\Box(\Box A \vee B) \to \Box A \vee \Box B}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Box(\Box A \vee B) \to \Box A \vee \Box B}{\to \Box(\Box A \vee B) \supset \Box A \vee \Box B}\,(\to\supset)}{\to \Box(\Box A \vee B) \prec (\Box A \vee \Box B)}\,(\to\Box)$$

さて一般に様相論理式の **degree** を次のように定義しよう．

1. 命題変数の degree は 0
2. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の degree をそれぞれ m および n とするとき

   $\sim\mathfrak{A}$ の degree は m

   $\Box\mathfrak{A}$ ($\Diamond\mathfrak{A}$) の degree は $m+1$

   $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$) の degree は $\max(m, n)$

このとき S5 では次のことが成り立つ．

定理 2 S5 の任意の論理式に対し，これと同値でたかだか degree 1 の論理式が存在する．

証明

$\Box(A\wedge B)=\Box A\wedge\Box B$	(6.9)
$\Box\Box A=\Box A$	(6.8) と公理 2 より導かれる
$\Box(A\vee\sim A)=A\vee\sim A$	(6.12)
$\Box\sim\Box A=\sim\Box A$	(公理 4)
$\Box(\Box A\vee B)=\Box A\vee\Box B$	(6.14)
$\Box(\sim\Box A\vee B)=\sim\Box A\vee\Box B$	(6.15)

を有限回繰り返して用いればよい　　*qed*

b．S1，S2，S3　前述の M，S4，S5 では，推論規則 ($\to\Box$) に用いられる Σ および Π は空の場合もゆるされた．これはトートロジーの規則 a が M, S4, S5 では成り立っているということにほかならない．しかし Lemmon の定義から明らかなように，S1, S2, S3 ではトートロジーの規則は一般に成り立たず，a より弱い a′ の形でしか成立しない．そこで sequential な M において「推論規則 ($\to\Box$) に用いられる Σ は空ではない」と条件をつけた体系を Q2 と定義する．このとき S2 と Q2 の間には次の関係が成り立つことが証明されている．

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{Q2} \vdash \rightarrow \mathfrak{A} & \Longleftrightarrow & \mathrm{S2} \vdash \Box \mathfrak{A} \\ \mathrm{S2} \vdash \mathfrak{A} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Q2} \vdash P \prec P \rightarrow \mathfrak{A} \end{array}\right\} [6.4]$$

（ただしPはあらかじめ定められた命題変数とする）

同じようにして，sequential な体系 M において推論規則（→□）を次のものでおきかえてえられる体系を Q3 と定義する.

$$\frac{\Sigma \rightarrow P \prec P, \mathfrak{A} \qquad \Box \Sigma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Box \Sigma \rightarrow \Box \mathfrak{A}} \ (\rightarrow\Box)$$

（ただしΣは空でないとし，Pはあらかじめ定められた命題変数とする.）

S3 と Q3 の間にも次の関係が成り立つことが証明できる.

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{Q3} \vdash \rightarrow \mathfrak{A} & \Longleftrightarrow & \mathrm{S3} \vdash \Box \mathfrak{A} \\ \mathrm{S3} \vdash \mathfrak{A} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Q3} \vdash P \prec P \rightarrow \mathfrak{A} \end{array}\right\} [6.5]$$

[6.4], [6.5] の証明はかなり面倒なので省略するが，これらを用いて S2 や S3 で証明可能な論理式をうることができる.

S2 で証明可能な論理式

$(A \prec B) \prec (\Box A \supset \Box B)$ (6.16)

$((A \prec B) \wedge (A \prec C)) \prec (A \prec (B \wedge C))$ (6.17)

$((A \prec B) \wedge (C \prec B)) \prec ((A \vee C) \prec B)$ (6.18)

$\Box B \prec (A \prec B)$ (6.19)

$\Box \sim A \prec (A \prec B)$ (6.20)

$(A \prec B) = (A = A \wedge B)$ (6.21)

S3 で証明可能な論理式

$(A \prec B) \prec (\Box A \prec \Box B)$ (6.22)

$\Box B \prec (\Box A \prec \Box B)$ (6.23)

$(A \wedge B \prec C) \prec (\Box A \prec (\Box B \prec \Box C))$ (6.24)

$\Box\Box\Box A = \Box\Box A$ (6.25)

$\Box \sim \Box \sim \Box \sim \Box A = \Box \sim \Box A$ (6.26)

$\Box\Box \sim \Box\Box A = \Box\Box \sim \Box A$ (6.27)

$\Box \sim \Box\Box \sim \Box \sim \Box A = \Box \sim \Box\Box A$ (6.28)

$\Box\Box \sim \Box \sim \Box\Box A = \Box\Box \sim \Box \sim \Box A$ (6.29)

$\Box A \prec \Box \sim \Box \sim \Box A$ (6.30)

$$\Box A \prec \Box \sim \Box \Box \sim \Box \Box A \tag{6.31}$$

注 S2, S3 を直接に sequential に定義することも可能であるがここでは述べない.

これらの論理式のうちの二, 三を証明してみよう.

(6.16)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \qquad B \to B}{A \supset B,\ A \to B}}{A \prec B, \Box A \to \Box B}\,(\to\Box)}{A \prec B \to \Box A \supset \Box B}}{\to (A \prec B) \supset (\Box A \supset \Box B)}$$

すなわち, $\to (A \prec B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ が Q2 で証明可能である. したがって [6.4] より

$$(A \prec B) \prec (\Box A \supset \Box B)$$

は S2 で証明可能である.

(6.22)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to P}{\to P \supset P}}{A \to P \supset P}}{\Box A \to P \prec P}}{\Box A \to P \prec P, \Box B}}{\to P \prec P, \Box A \supset \Box B}}{A \supset B \to P \prec P, \Box A \supset \Box B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \qquad B \to B}{A,\ A \supset B \to B}}{\Box A, A \prec B \to \Box B}}{A \prec B \to \Box A \supset \Box B}}{A \prec B \to \Box A \prec \Box B}\,(\to\Box)}{\to (A \prec B) \supset (\Box A \prec \Box B)}$$

すなわち $\to (A \prec B) \supset (\Box A \prec \Box B)$ が Q3 で証明可能である. したがって [6.5] より $(A \prec B) \prec (\Box A \prec \Box B)$ は S3 で証明可能である.

(6.25) の前半

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to P}{\to P \supset P}}{A \to P \supset P}}{\Box A \to P \prec P}}{\Box A \to P \prec P, \Box \Box A} \qquad \Box \Box A \to \Box \Box A}{\Box \Box A \to \Box \Box \Box A}\,(\to\Box)$$

すなわち, [6.5] より $\Box \Box A \prec \Box \Box \Box A$ は S3 で証明可能である.

注 以後様相論理系を扱うときは sequential な体系を考えることにし, Lemmon, Lewis などの形式化を扱うときにはその都度注意することにする.

B．様相命題論理系の基本定理

前項で述べた諸体系のうち Q 2，Q 3，M，S 4 については基本定理が成り立つことが証明できる．証明の方法は LK の場合と全く同じであり，論理記号 □ に関する二つの推論規則が付け加わったために生ずる二，三の場合を，新しく LK の場合の証明に付け加えればよい．ここでは比較的簡単な体系 M についてだけ述べることにするが，他の場合にも同じようにしてできる．ただし Q 3 については場合わけが多少面倒であり，また S 5 については工夫が必要である（後述）．

定理 3 様相命題論理系 M において証明可能な任意の式に対し，cut を全く含まないような証明図が存在する．

証明 LK の場合と同じように cut はあらかじめすべて mix でおきかえてあるものとし，このとき証明図の中で一番上にある mix をとり去ることができることを，証明図の grade と rank についての帰納法によって証明する．□ に関する推論規則に関係のある場合を LK のときの証明に付け加えればよい．

まず $\rho=2$ とする．このとき m-論理式 $\mathfrak{M}$ の一番外側の記号が □ のとき，証明図の部分は次のような形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda \to \mathfrak{A}}{\Box\Lambda \to \Box\mathfrak{A}}(\to\Box) \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Sigma \to \Pi}{\Box\mathfrak{A},\ \Sigma \to \Pi}(\Box\to)}{\Box\Lambda,\ \Sigma \to \Pi}(\Box\mathfrak{A})$$

ただし m-論理式 $\Box\mathfrak{A}$ は Σ に含まれていない．これを次のように変形する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda \to \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A},\ \Sigma \to \Pi}{\Lambda,\ \Sigma^{*} \to \Pi}(\mathfrak{A})}{\Lambda,\ \Sigma \to \Pi}}{\Box\Lambda,\ \Sigma \to \Pi}\ (\Box\to)\,(e\to)\ \text{を何度か用いる}$$

したがって，m-論理式の grade が 1 つ下ったから，帰納法の仮定より新しい mix をとり去ることができる．

次に $\rho>2$ の場合，まず $\rho_r>1$ のときを考える．mix の右上式が □ についての推論規則の下式であるのは次の場合だけである．

$$\dfrac{\Sigma \to \Pi \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Delta}{\Box\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Delta}(\Box\to)}{\Sigma,\ (\Box\mathfrak{A})^{*},\ \Gamma^{*} \to \Pi^{*},\ \Delta}(\mathfrak{M})$$

ただし $\mathfrak{M}$ は Γ に含まれている．これを次のように変形する．

1. $\mathfrak{M}$ が Σ に含まれているとき

$\mathfrak{M}=\Box\mathfrak{A}$ ならば

$$\begin{array}{c} \Box\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Delta \\ \hline\hline \Box\mathfrak{A},\ \Gamma^* \to \Delta \\ \hline\hline \Sigma,\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \end{array}$$

$\mathfrak{M}\neq\Box\mathfrak{A}$ ならば

$$\begin{array}{c} \Box\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Delta \\ \hline\hline \Box\mathfrak{A},\ \mathfrak{M},\ \Gamma^* \to \Delta \\ \hline\hline \Sigma,\ \Box\mathfrak{A},\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \end{array}$$

═══ は構造に関する推論（mix は用いていない）だけを何回か用いていることを表わす．したがって，もとの mix の下の終式は mix なしで表わすことができる．

2. $\mathfrak{M}$ が Σ に含まれていないとき

$$\begin{array}{cc} & \Sigma \to \Pi \qquad \mathfrak{A},\ \Gamma \to \Delta \\ \cline{2-2} & \Sigma,\ \mathfrak{A}^*,\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \quad (\mathfrak{M}) \\ \cline{2-2} & \Sigma,\ \mathfrak{A},\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \quad * \\ \cline{2-2}\cline{2-2} & \mathfrak{A},\ \Sigma,\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \\ \cline{2-2} \Sigma \to \Pi & \Box\mathfrak{A},\ \Sigma,\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta \quad (\Box\to) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\Sigma,\ (\Box\mathfrak{A})^*,\ \Sigma,\ \Gamma^* \to \Pi^*, \Pi^*,\ \Delta \quad (\mathfrak{M})} \\ \hline\hline \multicolumn{2}{c}{\Sigma,\ (\Box\mathfrak{A})^*,\ \Gamma^* \to \Pi^*,\ \Delta} \end{array}$$

この変形は $\mathfrak{M}\neq\Box\mathfrak{A}$ の場合であり，$\mathfrak{M}=\Box\mathfrak{A}$ のときは * をつけた推論の上式と下式は同じものになるから，いずれか一方を消すことにする．この変形により上の方の mix はもとの mix より rank が 1 つ下がるから帰納法の仮定により mix をなくすことができる．下の方の mix は $\mathfrak{M}$ が Σ に含まれていないという仮定より $\rho_r=1$ となり，やはり帰納法の仮定により mix をとり去ることができる．

最後に $\rho_l>1$ の場合を考える．mix の左上式が $\Box$ についての推論規則の下式であるのは次の場合だけである．

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta & \\ \cline{1-1} \Box\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta \quad (\Box\to) & \Sigma \to \Pi \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\Box\mathfrak{A},\ \Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi \quad (\mathfrak{M})} \end{array}$$

これを次のように変形する．

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A},\ \Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi}\ (\mathfrak{M})}{\Box\mathfrak{A},\ \Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi}\ (\Box\to)$$

新しい mix の rank はもとのものより 1 つ下ったから，帰納法の仮定より新しい mix をとりさることができる．以上で M の基本定理の証明は終った．

qed

注　この証明では Λ, Σ が空でないと条件をつけても成り立つから，Q2 の基本定理の証明も同時にできたことになる．

なお最後に S5 について一言ふれておこう．$S5$ での基本定理を証明することはそのままでは難しいが，「S5 の各推論規則に現われる論理式はすべてたかだか degree 1 のものに限る」と制限したとき，この体系を S5* とすれば S5* では基本定理の成り立つことが証明される．このことと前に述べた定理 2 を用いると次の定理をうる．

定理 4　様相命題論理系 S5 は無矛盾である．したがって S1, S2, S3, M, S4 もまた無矛盾である．

C．既約な様相

ここでは一つの命題変数 A からできる正および負の様相〔6.1 節参照〕について考えよう．

二つの様相 $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ は $\vdash \mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ が成り立つとき**可約** (reducible)，成りたたないとき**既約** (irreducible) であるという．既約な様相の個数は S3, S4, S5 においては有限個であり，これに反し S1, S2 および M においては無限個であることが証明できる．ここでは前者について述べる．後者については 7.1 節でふれよう．

以下で記法を簡単にするため，様相記号 □ と ◇ を混用する．また $\Box\Box A$ を $\Box^2 A$, $\Diamond\Diamond A$ を $\Diamond^2 A$ などと表わす．また様相の中には様相記号を全く含まないものも存在するので，様相記号 □，または ◇ を少なくとも一つは含んでいるような様相を**純様相** (proper modality) という．

定理 5 (Parry)　S3 の既約な様相の個数は 42 である．

証明　S3 ではすでに述べたように 5 つの論理式 (6.25)～(6.29) が成り立つが，これらは簡単に次のように表わされる．

$$\Box\Box^2 A = \Box^2 A \tag{6.25}$$

$$\Box\Diamond\Box\Diamond A=\Box\Diamond A \tag{6 26}$$

$$\Box^2\Diamond^2A=\Box^2\Diamond A \tag{6.27}$$

$$\Box\Diamond^2\Box\Diamond A=\Box\Diamond^2A \tag{6.28}$$

$$\Box^2\Diamond\Box^2A=\Box^2\Diamond\Box A \tag{6.29}$$

さて様相記号 ◇, □ を有限個ならべた列を一般に $\boldsymbol{M}$ と書くことにすると，どんな純様相も，正の様相は $\boldsymbol{M}A$，負の様相は $\boldsymbol{M}\sim A$ の形に書き表わすことができる．したがって S3 における（A を命題変数とする）純様相論理式は次の 4 つのタイプのいずれかに帰着させることができる．

（i） 正の様相で $\boldsymbol{M}$ の一番左側の記号が □ の場合

（ii） 正の様相で $\boldsymbol{M}$ の一番左側の記号が ◇ の場合

（iii） 負の様相で $\boldsymbol{M}$ の一番左側の記号が □ の場合

（iv） 負の様相で $\boldsymbol{M}$ の一番左側の記号が ◇ の場合

まず（i）のタイプの既約な様相の数が 10 であることを示そう．（i）における様相は $\boldsymbol{M}A$ であり $\boldsymbol{M}$ に含まれる□および◇の個数の和を n とすれば，$\boldsymbol{M}$ の一番左側の記号は□であるから $n=1,2,3,\cdots$ のとき $\boldsymbol{M}A$ はそれぞれ次のようになる．

$n=1$ のとき $\Box A$ ただ 1 つ

$n=2$ のとき $\Box^2A$，$\Box\Diamond A$

$n=3$ のとき $\Box^3A$，$\Box^2\Diamond A$，$\Box\Diamond\Box A$，$\Box\Diamond^2A$ の 4 つであるが (6.25) より最初のものは $\Box^2A$ と可約であるから消去する．

$n=4$ のとき $\Box^2\Diamond^2A$，$\Box\Diamond\Box\Diamond A$，$\Box\Diamond^3A$，$\Box^2\Diamond\Box A$，$\Box\Diamond\Box^2A$，$\Box\Diamond^2\Box A$ の 6 つであるが (6.27)，(6.26) (6.25) よりはじめの 3 つは消去できる．

$n=5$ のとき $\Box^2\Diamond\Box^2A$，$\Box^2\Diamond\Box\Diamond A$，$\Box\Diamond\Box^3A$，$\Box\Diamond^2\Box^2A$，$\Box\Diamond^2\Box\Diamond A$，$\Box\Diamond\Box^2\Diamond A$ の 6 つであるが (6.29)，(6.26)，(6.25)，(6.27)，(6.28) よりはじめの 5 つは消すことができる．

$n=6$ のとき $\Box\Diamond\Box^2\Diamond\Box A$，$\Box\Diamond\Box^2\Diamond^2A$ の 2 つであるが，(6.28)，(6.27) より 2 つとも消すことができる．

$n>7$ のとき既約な様相は現われないから，消されずに残った既約な様相は次の 10 種類である．

$\Box A$, $\Box^2 A$, $\Box\Diamond A$, $\Box^2\Diamond A$, $\Box\Diamond\Box A$, $\Box\Diamond^2 A$, $\Box^2\Diamond\Box A$, $\Box\Diamond\Box^2 A$, $\Box\Diamond^2\Box A$, $\Box\Diamond\Box^2\Diamond A$

（ii）のタイプの既約な様相は（i）の既約な 10 の様相にそれぞれ双対な次の 10 種である．

$\Diamond A$, $\Diamond^2 A$, $\Diamond\Box A$, $\Diamond^2\Box A$, $\Diamond\Box\Diamond A$, $\Diamond\Box^2 A$, $\Diamond^2\Box\Diamond A$, $\Diamond\Box\Diamond^2 A$, $\Diamond\Box^2\Diamond A$, $\Diamond\Box\Diamond^2\Box A$

（iii）および（iv）のタイプの既約な様相は，上にえられた（i），（ii）の様相の A を $\sim A$ でおきかえればよいからそれぞれ 10 種類ずつあることがわかり，したがって純様相の総数は 40 である．さらに様相記号を含まない様相は A と $\sim A$ であるから既約な様相は 42 を超えないことがわかる．これら 42 種の様相が S3 においては互いに既約であることは別に証明することができる． *qed*

定理 6 S4 の既約な様相の個数は 14 である．

証明 S4 では $\Box^2 A = \Box A$ およびこれに双対の $\Diamond^2 A = \Diamond A$ が成り立つから，S3 の既約な様相のうち，様相記号の右肩についている数字 2 をすべて消去し (6.26) を用いると（i）のタイプの既約な様相は $\Box A$, $\Box\Diamond A$, $\Box\Diamond\Box A$ の 3 種となる．（ii），（iii），（iv）の場合も同様で 12 個の純様相をうる．A と $\sim A$ を付け加えれば総計 14 をうる． *qed*

定理 7 S5 の既約な様相の個数は 6 である．

証明 S5 では $\Box A = \Box\Diamond\Box A = \Diamond\Box A$ およびこれの双対として $\Diamond A = \Diamond\Box\Diamond A = \Box\Diamond A$ が成り立つから，正の既約な様相は $\Box A$, A, $\Diamond A$ であり，負の既約な様相とともに 6 個の既約な様相をうる． *qed*

D．述語計算への拡張

ここでは様相命題論理体系のうち S5 を例にとりこれを述語論理へ拡張することを考えよう．S5 では $\Diamond\mathfrak{A}$ を $\sim\Box\sim\mathfrak{A}$ で定義することにより，$\Diamond$ に関する次の推論規則の成り立つことが容易に確かめられる．

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta,\ \Diamond\mathfrak{A}} \quad (\to\Diamond)$$

$$\frac{\mathfrak{A},\ \Sigma \to \Pi}{\Diamond\mathfrak{A},\ \Sigma \to \Pi} \quad (\Diamond\to)$$

ただし Σ, Π の各論理式の一番外側の記号は様相記号 $\Box$ または $\Diamond$ であると

する．Σ, Π は空であってもよい．

定義 3 述語計算 S5 は命題計算 S5 に，LK における 4 つの推論規則 $(\to\forall)$, $(\forall\to)$, $(\to\exists)$, $(\exists\to)$ を付け加えたものとして定義される．

さて M においては $\Box A\wedge\Box B\prec\Box(A\wedge B)$ が証明可能であり，より一般に有限個の命題変数 $A_1, \cdots, A_n$ について $\Box A_1\wedge\cdots\wedge\Box A_n\prec\Box(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)$ が証明可能である．A_n を可算無限個にしたとき，これに対応する論理式は

$$\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\prec\Box\,\forall x\,\mathfrak{F}(x) \tag{6.32}$$

であるが，様相命題論理系を初めて述語論理へ拡張した Barcan は，$\forall$ および $\exists$ について通常用いられている公理や推論のほか，$\Diamond\exists x\,\mathfrak{F}(x)\prec\exists x\Diamond\mathfrak{F}(x)$ (この論理式は (6.32) と同値であるが) を公理として仮定した．述語計算 S5 では (6.32) は次のようにして証明される．ただし定義 3 と同じようにして定義された述語計算 S4 では成り立たない．

定理 8 述語計算 S5 において (6.32) は証明可能である．

証明 次の 3 式

$$A\to\Box\Diamond A \tag{6.33}$$

$$\Box\Diamond\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x) \tag{6.34}$$

$$\Box\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\forall x\,\mathfrak{F}(x) \tag{6.35}$$

が証明可能であれば，これらに cut を用いて $\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\forall x\,\mathfrak{F}(x)$ が証明可能となり

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\forall x\,\mathfrak{F}(x)}{\to\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\supset\Box\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\supset)}{\to\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\prec\Box\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\Box)$$

より (6.32) がえられる．

(6.33) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box B\to\Box B}{\to\Box B,\sim\Box B}}{\to\Box B,\Box\sim\Box B}\,(\to\Box)\qquad\dfrac{B\to B}{\Box B\to B}\,(\Box\to)}{\dfrac{\to\Box\sim\Box B,\ B}{\sim B\to\Box\sim\Box B}\,(\sim\to)}\,\text{cut}$$

B に $\sim A$ を代入し，$\sim\Box\sim$ を $\Diamond$ でおきかえれば (6.33) をうる．

(6.34) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\,\mathfrak{F}(a)\to\Box\,\mathfrak{F}(a)}{\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\mathfrak{F}(a)}\,(\forall\to)}{\Diamond\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\mathfrak{F}(a)}\,(\Diamond\to)}{\Diamond\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\forall)}{\Box\,\Diamond\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)}\,(\Box\to)}{\Box\,\Diamond\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\Box)$$

(6.35) の証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}(a)\to\mathfrak{F}(a)}{\Box\,\mathfrak{F}(a)\to\mathfrak{F}(a)}\,(\Box\to)}{\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\mathfrak{F}(a)}\,(\forall\to)}{\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\forall)}{\Box\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\,(\Box\to)}{\Box\,\forall x\,\Box\,\mathfrak{F}(x)\to\Box\,\forall x\,\mathfrak{F}(x)}\,(\to\Box)$$

qed

注　様相命題論理体系 S5 [6·2 節A項参照] では M の場合程簡単に基本定理は成り立たないが上の (6.33) の証明に現われた場合が一つの反例になっている.

6·3　様相命題論理系の決定問題

すでに扱ってきた様相命題論理のいろいろの体系のうち, S1 を除く他の 5 つの体系については, 命題論理の範囲において決定手続きを与えることが可能である. 方法も幾とおりか考えられているがここでは sequential な方法と真理表による方法を述べよう.

A. sequential な方法

M および S4 の sequential な体系では基本定理が成り立ち, また「部分論理式についての性質」 [4·1 節B項参照] は様相に関する推論規則についても成り立つから M, S4 の決定手続きは Gentzen による LK, LJ の決定手続きと全く同様にして与えることができる [4·3 節A項参照].

S2, S3 については直接 sequential な形式化を与えなかったけれども, ここでは基本定理が成り立つように Q2, Q3 を定義し, またこれらと S2, S3 との関係は [6.4], [6.5] で与えられているから, Q2, Q3 について決定問題が解ければよい. Q2 は M とほとんど同様であるから Q3 について一言ふれておこう.

Q3 ではあらかじめ定められた命題変数 P が用いられている点でほかの体系の場合に比べ少し変更が必要である. そこで Q3 の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ について

「$\mathfrak{A}$ の部分論理式」の定義を少し拡げ，本来の意味での $\mathfrak{A}$ の部分論理式および P, $P \supset P$, $P \prec P$ であると定める．このように部分論理式の定義を拡げても，「部分論理式についての性質」は Q 3 において成り立っている．また Q 3 では基本定理が成り立っているから，M, S 4 などと同じようにして S 3 の決定手続きが与えられる．すなわち，S 3 の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ が決定可能であるかどうかは，Q 3 において式 $P \prec P \to \mathfrak{A}$ が決定可能かどうかによって定まる．

S 5 については S 5* [6·2 節 B 項参照] を用いて決定手続きが与えられるがここでは省略する．

B．真理表による方法

この方法は主として von Wright および Anderson によって見いだされたものである．まず von Wright による考え方の大筋を述べておこう．

古典命題論理 PC においては論理式 $\mathfrak{A}$ に含まれる命題変数に独立に真の値 1 および偽の値 0 を与えることによって $\mathfrak{A}$ の真理表を構成したが，様相記号を含む論理式 $\mathfrak{A}$ では $\mathfrak{A}$ に含まれる命題変数および一番外側の記号が $\Diamond$ であるような $\mathfrak{A}$ の部分論理式 $\Diamond\mathfrak{B}$ が PC における命題変数の役割を果たすことになる．したがってこの場合 $\mathfrak{A}$ の部分論理式 A と $\Diamond A$ に独立に真偽値 1, 0 を与えるという事情がおこる．たとえば $\mathfrak{A}$ として論理式 $\Diamond A \supset (A \wedge \Diamond A)$ を考えることにすれば，$\mathfrak{A}$ の真理表では A および $\Diamond A$ にそれぞれ独立に 1 および 0 を与えることとなり真理表は右のようになる．

A	$\Diamond A$	$\Diamond A \supset (A \wedge \Diamond A)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

しかし第 2 行目の A, $\Diamond A$ への値の与え方では $A \supset \Diamond A$（これは S 4 で証明可能）は値 0 をとることがわかる．このように S 4 から導かれる性質と矛盾するような行はすべて消去し，残った行が $\Diamond A \supset (A \wedge \Diamond A)$ に対してすべて値 1 をとるとき，この論理式は S 4 で真であるという．論理式が真であることと，証明可能であることとが一致するように行を消去する規則が確定したとき一般に論理式は決定可能となるわけである．以上の von Wright の考え方をもとにして Anderson は数学的に厳密な理論を作った．以下 S 4 を例にとって Anderson の方法を紹介しよう．S 4 での基本論理記号としては $\sim, \wedge, \Diamond$ を用いることにする．

定義 4　次の二つの条件を満足する論理式を**変項** (constituent) という.

1.　命題変数は変項である.
2.　$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ が変項のとき，$\Diamond(\mathfrak{B}_1' \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_n')$ は変項である. ただし，$\mathfrak{B}_i'(i=1, \cdots, n)$ は $\mathfrak{B}_i$ または $\sim\mathfrak{B}_i$ を表わす.

定義 4 の条件 2 は次の 2′ でおきかえることができる.

2′　$\Diamond\mathfrak{B}$ の形の論理式で，$\mathfrak{B}$ の部分論理式として $\sim\sim\mathfrak{C}$, $\sim(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{D})$ の形のものを含まないものは変項である.

定義 5　S 4 の論理式 $\mathfrak{A}$ が**標準形**であるとは，$\Diamond\mathfrak{B}$ の形をした $\mathfrak{A}$ の部分論理式はすべて変項であるときをいう.

定理 9　S 4 の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対し，標準形の論理式 $\mathfrak{B}$ が存在し，$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ が証明可能である.

証明　$\mathfrak{A}$ は基本論理記号だけで表わされていると仮定する. 次の論理式はいずれも S 4 で証明可能である.

$$\Diamond\sim(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{D})=\sim(\sim\Diamond\sim\mathfrak{C}\wedge\sim\Diamond\sim\mathfrak{D})$$

$$\Diamond(\sim(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{D})\wedge\mathfrak{E})=\sim(\sim\Diamond(\sim\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{E})\wedge\sim\Diamond(\sim\mathfrak{D}\wedge\mathfrak{E}))$$

$$\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim(\mathfrak{D}\wedge\mathfrak{E}))=\sim(\sim\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim\mathfrak{D})\wedge\sim\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim\mathfrak{E}))$$

$$\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim(\mathfrak{D}\wedge\mathfrak{E})\wedge\mathfrak{F})=\sim(\sim\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim\mathfrak{D}\wedge\mathfrak{F})\wedge\sim\Diamond(\mathfrak{C}\wedge\sim\mathfrak{E}\wedge\mathfrak{F}))$$

さて $\Diamond\mathfrak{C}$ の形をした $\mathfrak{A}$ の部分論理式の中に，上に述べた 4 つの論理式の左辺の形が現われれば，それを右辺の形のものでおきかえる. また $\sim\sim\mathfrak{C}=\mathfrak{C}$ であるから $\sim\sim\mathfrak{C}$ の形の論理式はすべて $\mathfrak{C}$ でおきかえることにより求める標準形がえられる.　　*qed*

今後論理式 $\mathfrak{A}$ は定理 9 により標準形になっていると仮定する. $\mathfrak{A}$ の真理表を次のようにしてつくる. まず $\mathfrak{A}$ のすべての異なった変項を $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_k$ とする ($\mathfrak{C}_i$ が別の $\mathfrak{C}_j$ の変項であることもおこりうる). $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_k$ のおのおのにそれぞれ独立に値 1 および 0 を対応させる仕方は 2^k とおりある. この対応を PC の真理表と同様に次のように表わす.

$\mathfrak{C}_1 \cdots\cdots\cdots \mathfrak{C}_k$	$\mathfrak{A}$	
		} 2^k

この表は 2^k 個の行（上から順に第1行，第2行，…という）と $k+1$ 個の列（左から順に第1列，第2列，…という）からなっており，$\mathfrak{A}$ の真理表といい $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ と表わす．$\mathfrak{A}$ の値が1をとる行を $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の T 行，0の値をとる行を $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の F 行という．ある行で $\mathfrak{C}_i$ の値が1のとき，この行で $\mathfrak{C}_i=1$ などと書く．

例　$\mathfrak{T}(\sim(A\wedge\sim\Diamond A))$ は次のとおり．

A	$\Diamond A$	$\sim(A\wedge\sim\Diamond A)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\Diamond\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の変項であるときは $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ をつくることにより $\mathfrak{B}$ がある行で1であるか0であるかは有限回の操作できまる．さて $\mathfrak{A}$ の真理表 $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ からある行をいくつか消去したとき

「$\mathfrak{A}$ が S4で証明可能 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の残された行に対する $\mathfrak{A}$ の値がすべて1」

となるような行の消し方を定めよう．

定義 6　S4の論理式 $\mathfrak{A}$ が次の条件（1），（2）をみたすとき，$\mathfrak{A}$ を（S4の）n-**トートロジー**という．

（1）　$\mathfrak{A}$ は degree n の論理式である．

（2）　$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の F 行は次の三つの条件の少なくも一つをみたす．

Ⅰ．$\mathfrak{B}=1$，$\Diamond\mathfrak{B}=0$ であるような変項 $\Diamond\mathfrak{B}$ が存在する．

Ⅱ．$\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{C}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{C}_h\vee\Diamond\mathfrak{D}_1\vee\cdots\vee\Diamond\mathfrak{D}_k)$ が (n_1-1)-トートロジーで，かつ $\Diamond\mathfrak{B}=1$，$\Diamond\mathfrak{C}_i=0$，$\Diamond\mathfrak{D}_j=0$ であるような $\Diamond\mathfrak{B}$ (degree $n_1\leqq n$)，$\Diamond\mathfrak{C}_i$，$\Diamond\mathfrak{D}_j$ が存在する．

ただし $1\leqq i\leqq h$，$1\leqq j\leqq k$，$h\geqq 0$，$k\geqq 0$，$h+k>0$ とする．

Ⅲ．$\sim\mathfrak{B}$ が n_1-トートロジー $(n_1<n)$ でしかも $\Diamond\mathfrak{B}=1$ であるような $\Diamond\mathfrak{B}$ が存在する．

$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の F 行が上述のⅠ～Ⅲの条件の少なくも一つをみたすとき，F 行は**条件をみたす**といい，Ⅰ～Ⅲのいずれもみたさないとき，F 行は**条件をみたさない**という．

注 1 前頁の例では第2行は条件Iをみたしているから $\sim(A\wedge\sim\Diamond A)$ は 1-トートロジーである.

注 2 Iは $\mathfrak{B}\supset\Diamond\mathfrak{B}$ に対応し，IIは

$$\frac{\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{C}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{C}_h\vee\Diamond\mathfrak{D}_1\vee\cdots\vee\Diamond\mathfrak{D}_k)}{\Diamond\mathfrak{B}\supset(\Diamond\mathfrak{C}_1\vee\cdots\vee\Diamond\mathfrak{C}_h\vee\Diamond\mathfrak{D}_1\vee\cdots\vee\Diamond\mathfrak{D}_k)}$$

に対応し，III はトートロジーの規則に対応している.

定理 10 $\mathfrak{A}$ が n-トートロジー $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は証明可能

証明 $\mathfrak{A}$ の degree n に関する帰納法による.

$n=0$ のとき $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ は二値の真理表を表わしているから，命題論理系 PC の完全性より $\mathfrak{A}$ は証明可能である.

次に $n_1<n$ であるような n_1 について定理はすでに成り立っていると仮定する. $\mathfrak{A}$ の変項を $\mathfrak{C}_1,\cdots,\mathfrak{C}_k$ としこれらにあらかじめ指定した命題変数 $c_1,\cdots,c_k$ を代入する. 代入は $\mathfrak{C}_i$ のうち degree の高いものから順に c_i を代入して行くものとし代入の結果 $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}'$ になったとすれば，$\mathfrak{A}'$ は命題変数 $c_1,\cdots,c_k$ の論理式でかつ degree は0である. $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}')$ は $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ において $\mathfrak{C}_i$ を c_i でおきかえたものになっている.

$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ に F 行が r 個含まれているとし，これらを F_1 行, $\cdots$, F_r 行とする. これらの行では $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'=0$ である. $\mathfrak{A}$ は n-トートロジーであるから定義よりどの F_i 行 $(1\leqq i\leqq r)$ も条件 I ～IIIの少なくも一つは満足している.

まず上の F_i 行のおのおのに対して次の二つの条件.

$$\begin{cases}\mathfrak{L}_i \text{ は証明可能である}\\ \mathfrak{L}_i'=0\end{cases}$$

を満足する論理式 $\mathfrak{L}_i$ が構成できることを示そう. F_i 行が条件 I ～III のどれをみたすかによって分類しよう.

i) F_i 行がIをみたすとすると，$\Diamond\mathfrak{B}$ の形の $\mathfrak{A}$ の変項 $\mathfrak{C}_a$ が存在して $\mathfrak{C}_a=\Diamond\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{B}=1$ である. $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の変項のいくらかを用いてつくられる論理式であるから $\mathfrak{B}=F(\mathfrak{C}_{b_1},\cdots,\mathfrak{C}_{b_j})$ と表わすことにし，$F(\mathfrak{C}_{b_1},\cdots,\mathfrak{C}_{b_j})\supset\mathfrak{C}_a$ を $\mathfrak{L}_i$ とおけば論理式 $\mathfrak{L}_i$ は $\mathfrak{B}\supset\Diamond\mathfrak{B}$ であるから S4 で証明可能である. また $\mathfrak{L}_i'$ は $F(c_{b_1},\cdots,c_{b_j})\supset c_a$ となり，$F(c_{b_1},\cdots,c_{b_j})=1$, $c_a=0$ であることより $\mathfrak{L}_i'=0$ である.

ii) F_i 行が II をみたすとすると $\Diamond\mathfrak{B}$ の形の変項 $\mathfrak{C}_a$ が存在して $\mathfrak{C}_a=1$

また $\mathfrak{C}_{b_1}=\diamond\mathfrak{D}_1=0, \cdots, \mathfrak{C}_{b_h}=\diamond\mathfrak{D}_h=0$ ($h\geqq 0$) をみたす $\diamond\mathfrak{D}_1, \cdots, \diamond\mathfrak{D}_h$ および $\mathfrak{C}_{c_1}=\diamond\mathfrak{E}_1=0, \cdots, \mathfrak{C}_{c_k}=\diamond\mathfrak{E}_k=0$ ($k\geqq 0$) をみたす $\diamond\mathfrak{E}_1, \cdots, \diamond\mathfrak{E}_k$ が存在して $h+k>0$ である．しかも $\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{D}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{D}_h\vee\diamond\mathfrak{E}_1\vee\cdots\vee\diamond\mathfrak{E}_k)$ は (n_1-1) トートロジーである．そこで $\mathfrak{C}_a\supset(\mathfrak{C}_{b_1}\vee\cdots\vee\mathfrak{C}_{b_h}\vee\mathfrak{C}_{c_1}\vee\cdots\vee\mathfrak{C}_{c_k})$ を $\mathfrak{L}_i$ とおけば，$\diamond\mathfrak{B}\supset(\diamond\mathfrak{D}_1\vee\cdots\vee\diamond\mathfrak{D}_h\vee\diamond\mathfrak{E}_1\vee\cdots\vee\diamond\mathfrak{E}_k)$ は上の論理式に S4 で成り立つ推論規則を用いて導けるから証明可能である．

一方 $\mathfrak{L}_i'$ は $c_a\supset(c_{b_1}\vee\cdots\vee c_{b_h}\vee c_{c_1}\vee\cdots\vee c_{c_k})$ で $c_a=1$．また右辺の命題変数はすべて値 0 をとるから $\mathfrak{L}_i'=0$ となる．

iii) F_i 行が III を満たすとすると $\diamond\mathfrak{B}$ の形の変項 $\mathfrak{C}_a$ が存在して $\mathfrak{C}_a=1$ かつ $\sim\mathfrak{B}$ は n_1-トートロジー ($n_1<n$) である．したがって帰納法の仮定より $\sim\mathfrak{C}_a$ を $\mathfrak{L}_i$ と定義すれば $\sim\diamond\mathfrak{B}=\sim\diamond\sim(\sim\mathfrak{B})$ であり，$\sim\mathfrak{B}$ は帰納法の仮定より証明可能である．したがってトートロジーの規則より $\sim\diamond\mathfrak{B}$ は証明可能である．一方 $\mathfrak{L}_i'=\sim c_a$ であり $c_a=1$ だから $\mathfrak{L}_i'=0$ となる．以上 i)〜iii) より求める論理式 $\mathfrak{L}_i$ の構成が示された．

さて $(\mathfrak{L}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{L}_r)\supset\mathfrak{A}$ を ϕ とおこう，$\mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_r$ は証明可能であるから，ϕ がもし証明可能ならば，$\mathfrak{A}$ は証明可能となり，定理 10 は成り立つこととなる．ϕ が証明可能であることは次のようにして示される．

ϕ のなかに表われるすべての $\mathfrak{C}_j (1\leqq j\leqq k)$ に c_j を代入したものを ϕ' とする．すなわち ϕ' は $(\mathfrak{L}_1'\wedge\cdots\wedge\mathfrak{L}_r')\supset\mathfrak{A}'$ であり，これは命題変数を $c_1, \cdots, c_k$ とする degree 0 の論理式であり，明らかに $\mathfrak{T}(\phi)$ は $\mathfrak{T}(\phi')$ と一致する．

r 個の F_i 行については $\mathfrak{L}_1'\wedge\cdots\wedge\mathfrak{L}_r'=0$ であるから，$(\mathfrak{L}_1'\wedge\cdots\wedge\mathfrak{L}_r')\supset\mathfrak{A}'$ は値 1 をとる．したがって $\phi'=1$ である．残りの 2^k-r 個の行については初めから値 1 をとっているから $\mathfrak{T}(\phi')$ はすべての 1 および 0 の組合せに対し常に値 1 をとる．また ϕ' は degree 0，したがって ϕ は証明可能である． *qed*

$\mathfrak{A}$ がある n に対して n-トートロジーであるとき，$\mathfrak{A}$ はトートロジーであるという．したがって次の定理が成り立つ．

定理 11 $\mathfrak{A}$ が S4 のトートロジー $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は S4 で証明可能.

次に定理 11 の逆を示そう．すなわち $\mathfrak{A}$ が S4 で証明可能であるとき，$\mathfrak{A}$ がトートロジーであることを示す．それには S4 の公理がすべてトートロジーであること，および S4 の推論規則がトートロジーを保つことを示せばよい．

まずS4の公理（すべて標準形になっているとする）がすべてトートロジーであることは容易にたしかめることができる．たとえば $A \prec \Diamond A$ について考えるとこれを標準形になおしたものは $\sim\Diamond(A\wedge\sim\Diamond A)$ であるから，この論理式に対する真理表は次のようになる．

A	$\Diamond A$	$\Diamond(A\wedge\sim\Diamond A)$	$\sim\Diamond(A\wedge\sim\Diamond A)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

第3行はⅠをみたし，第 1，5，7 行はいずれもⅢをみたしている（$\sim(A\wedge\sim\Diamond A)$ は例より 1-トートロジーであり $\Diamond(A\wedge\sim\Diamond A)=1$ であるから），したがって $\sim\Diamond(A\wedge\sim\Diamond A)$ は 2-トートロジーである．

推論規則について本質的なのは MP であるから，次の定理を証明すればよい．

定理 12 $\mathfrak{A}$ および $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$ がトートロジーならば，$\mathfrak{B}$ もトートロジーである．

証明 $\mathfrak{A}$ および $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$ がともにトートロジーで，しかも $\mathfrak{B}$ がトートロジーでないと仮定すると $\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ には条件をみたさないような F 行が存在する．次の二つの場合に分ける．

i）$\mathfrak{A}$ の変項がすべて $\mathfrak{B}$ の変項であるとき

$\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ の条件をみたさないような F 行を第 i 行とする．$\mathfrak{A}$ の変項はすべて $\mathfrak{B}$ の変項であるから，$\mathfrak{B}$ の変項と $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$ の変項は同じであり $\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ は $\mathfrak{T}(\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B}))$ と一致する．さて $\mathfrak{T}(\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B}))$ の第 i 行目における $\mathfrak{A}$ の値はいくらであるかをしらべると次の ①，② いずれの場合にも矛盾が生ずる．

① もし第 i 行目で $\mathfrak{A}=0$ と仮定すれば，この行は $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の条件をみたす F 行ではありえない（なぜならもし条件をみたす F 行だとすれば，この行は

$\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$）の条件をみたす行となるから）．すなわち，$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ は条件をみたさない F 行をもつから $\mathfrak{A}$ はトートロジーでなくなり仮定に反する．

② もし第 i 行目で $\mathfrak{A}=1$ と仮定すれば，この行で $\mathfrak{A}=\sim\mathfrak{B}=1$ だから，$\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})=0$ となるが，第 i 行目は条件をみたさないのだから $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$ はトートロジーでなくなり仮定に反する．

ii） 次に $\mathfrak{A}$ の変項であって $\mathfrak{B}$ の変項でないものが存在するとする．この場合は次の補助定理が必要である．

補助定理 $\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ が条件をみたさない F 行をもつとしそれを第 i 行とすれば $\mathfrak{T}(\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B}))$ は条件をみたさない第 j 行をもち，$\mathfrak{B}=0$ である（これの略証は後で述べる）．

この補助定理を用いると，上と同じようにして定理は証明される．すなわち，

① もし第 j 行で $\mathfrak{A}=1$ と仮定すれば，この行では $\mathfrak{B}=0$ であるから $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})=0$ となる．補助定理より第 j 行は条件をみたさないから $\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B})$ はトートロジーでなくなり仮定に反する．

② もし第 j 行で $\mathfrak{A}=0$ と仮定すれば，この行は条件をみたさないから，$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ の条件をみたさない F 行が存在することになり，$\mathfrak{A}$ はトートロジーでなくなり仮定に反する．

さて最後に補助定理の証明の概略を述べておこう．

$\mathfrak{A}$ の変項で $\mathfrak{B}$ の変項でないものを degree の小さいものから順に並べ $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_k$ とする．

標準形をした次のような論理式の系列 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ を考えよう．

$$\phi_1 : \mathfrak{B}$$

$$\phi_2 : \mathfrak{B}\wedge\sim(\mathfrak{C}_1\wedge\sim\mathfrak{C}_1)$$

$$\phi_3 : \mathfrak{B}\wedge\sim(\mathfrak{C}_1\wedge\sim\mathfrak{C}_1)\wedge\sim(\mathfrak{C}_2\wedge\sim\mathfrak{C}_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi_{k+1} : \mathfrak{B}\wedge\sim(\mathfrak{C}_1\wedge\sim\mathfrak{C}_1)\wedge\cdots\wedge\sim(\mathfrak{C}_k\wedge\sim\mathfrak{C}_k)$$

ϕ_{h+1} は ϕ_h よりちょうど一つだけ（すなわち $\mathfrak{C}_h$ だけ）変項が多いから $\mathfrak{T}(\phi_{h+1})$ は $\mathfrak{T}(\phi_h)$ と比べて行は2倍になり列は一つだけ増えている．また $\mathfrak{T}(\phi_{k+1})$ は $\mathfrak{T}(\sim(\mathfrak{A}\wedge\sim\mathfrak{B}))$ と一致している．証明すべきことは「$\mathfrak{T}(\phi_h)$ が条件をみたさない F 行をもてば $\mathfrak{T}(\phi_{h+1})$ も条件をみたさない行をもちその行

では $\phi_h=0$」であるからこれの対偶をとり

「$\mathfrak{K}\wedge\sim(\mathfrak{D}\wedge\sim\mathfrak{D})$ が n-トートロジー $\Rightarrow$ $\mathfrak{K}$ はトートロジー」

を示そう．ただし $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{K}$ に含まれない変項を表わすものとする．

証明は n についての帰納法による．$n=0$ のときは明らかであるから $n_1(<n)$ のとき成り立つと仮定する．このとき本質的なのは $\mathfrak{D}=\Diamond\mathfrak{E}$ の形のときである．明らかに $\mathfrak{E}$ は $\mathfrak{K}$ の変項の論理式になっている．さて $\mathfrak{K}\wedge\sim(\Diamond\mathfrak{E}\wedge\sim\Diamond\mathfrak{E})$ が n-トートロジーで $\mathfrak{K}$ がトートロジーでないとして矛盾を導こう．

$\Diamond\mathfrak{E}$ は変項であり，$\mathfrak{E}$ は $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ から真偽値が求められる．仮定より $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ のある F 行は条件をみたさないからこれを第 i 行とする．この行には各 $\mathfrak{C}_i$ に 1 および 0 の値が与えられている．したがって $\mathfrak{T}(\mathfrak{K}\wedge\sim(\Diamond\mathfrak{E}\wedge\sim\Diamond\mathfrak{E}))$ では，各 $\mathfrak{C}_i$ には上と同じ値で $\Diamond\mathfrak{E}$ には 1 を与える行（これを i_T 行という）と，0 を与える行（これを i_F 行という）とに分れる．

そこで 1, 0 のすべての与え方に対し，i_T 行および i_F 行がともに条件をみたすならば，i 行も条件をみたすことを示せば十分である．i_T および i_F 行が条件 I ～III のどれをみたしているかによって場合分けを行なえばよい．証明は長くはなるが特別な技巧は全くいらないので比較的簡単な一例をあげるだけに止めよう．たとえば，

i_T 行が条件 I を，i_F 行が条件 I ～III のいずれかをみたすとしよう．i_T 行では $\Diamond\mathfrak{B}$ の形の変項が存在し $\Diamond\mathfrak{B}=0$ かつ，この行で $\mathfrak{B}=1$ である．しかし $\Diamond\mathfrak{E}$ は i_T 行では値 1 をとるから $\Diamond\mathfrak{E}\neq\Diamond\mathfrak{B}$, すなわち $\Diamond\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{K}$ の変項であることがわかる．したがって第 i 行では I がみたされている． *qed*

以上述べたことから次の定理がえられる．

定理 13 $\mathfrak{A}$ が S 4 で証明可能 $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は S 4 のトートロジー．

条件 I ～III がみたされるかどうかは明らかに有限回の操作できまり，かつ定理 11 と定理 13 が成り立つから命題論理系 S 4 は決定可能である．

注 von Wright および Anderson の方法は二値の真理表のごく自然な拡張になっているが，条件 I ～III を Gentzen 流の形式化に適合するように変形することによりこの方法は sequential な方法と根本的に同じ考え方であることがわかる．この証明で最後に述べた I ～III のいろいろの組合せの処理が，Gentzen の基本定理の証明の個々の場合に対応するわけである．

第7章　束論と論理

第7章は単独の章というよりか補章と名付けるべきもので，束論と論理体系の間の関連を扱う．代数系の問題を論理の問題に変え，また逆に論理の問題を代数系の問題に変えることが有効な場合が多い．前者の一例として自由束の語の問題をとり扱い，また後者の一例として様相論理系S2の既約な様相の個数が無限個あることの証明をとり扱う．

また LK より弱い体系における基本定理の証明の一例を示したことになっているが，これはちょうど第6章で LK より強い体系での基本定理の扱いに対応するものである．

7·1　自由束と論理

いろいろの自由束に対し，これを表現する論理体系が存在する．この両者の対応関係を用いれば，たとえば論理体系の完全性の問題を，代数系を用いて証明することができるし，逆に代数系の問題たとえば自由束の語の問題を，論理体系の性質を用いて処理することもできる．ここではその一例を述べよう．

A．自由束の語の問題

定義 1　集合Xが**束**（lattice）であるとは，Xに二項演算$\cap$および$\cup$が定義され，Xの任意の元 x, y, z について，次の公理 L1～L4 が成り立つときをいう．

L1	$x\cap x=x$	$x\cup x=x$
L2	$x\cap y=y\cap x$,	$x\cup y=y\cup x$
L3	$x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$,	$x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z$
L4	$x\cap(x\cup y)=x$,	$x\cup(x\cap y)=x$

ただしここに用いた等号 ＝ は同一の元であることを表わす記号である．

定義 2　束Xが**モデュラー束**（modular lattice）であるとは，X の任意の元 x, y, z について，次の L5 が成り立つときをいう．

L5　　$x\cap(y\cup(x\cap z))=(x\cap y)\cup(x\cap z)$

定義 3　束 X が**分配束**（distributive lattice）であるとは，X の任意の元 x, y, z について，次の L6 が成り立つときをいう．

L 6　　$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$

定義 4　可算個の変数 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ を**生成元**とし，∩および∪を演算とする体系を**絶対自由系**という．絶対自由系を上記 L 1〜L 4 をみたす同値関係により類別したときつくられる剰余類を，**生成元が可算個の自由束**といい，以下単に**自由束** (free lattice) という．

定理 1　自由束は次の条件を満足する代数系Lと同値である．

1)　変数　$x_1, \cdots, x_n, \cdots$

2)　演算　∩, ∪

3)　公理　L 1 〜 L 4 および $x=x$

4)　導出規則

　1°　$x=y \Rightarrow y=x$

　2°　$x=y$　かつ　$y=z \Rightarrow x=z$

　3°　$x=y \Rightarrow x\cap z=y\cap z$

　4°　$x=y \Rightarrow x\cup z=y\cup z$

5)　定義

　$x\leqq y$ を $x\cup y=y$ または $x\cap y=x$ で定義する．

注　$x\cup y=y$ ならば $x\cap y=x\cap(x\cup y)=x$ であり，逆も成り立つから，$x\cup y=y$ と $x\cap y=x$ は同値である．

定義 5　自由束が L 5 (または L 6) をみたすとき，この体系を**自由モデュラー束** M (または**自由分配束** D) という．

次に自由束Lに対応する論理体系 $\boldsymbol{L}$ を定義しよう．ここに「対応する」というのは，後に述べる定理 4 の意味である．

定義 6　論理体系 $\boldsymbol{L}$ は次のように定義される．

1.　記号　命題変数　$A, B, C, \cdots$

　　　　論理記号　∧, ∨

2.　表現　論理式の定義

　　1.　命題変数 $A, B, C, \cdots$ は論理式である．

　　2.　$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が論理式ならば，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ はともに論理式である．

　　3.　1，2 で論理式とわかったものだけが論理式である．

　　式の定義

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \rightarrow \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$$

の形の図形を式という．ただし $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_j$ はすべて論理式とし，$m, n=1, 2, \cdots$とする．

3. 公理

$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ の形の式に限る．$\mathfrak{D}$ は論理式である．

4. 推論規則

1. 構造に関する推論規則

$(\rightarrow w), (w \rightarrow)$; $(\rightarrow c), (c \rightarrow)$; $(\rightarrow e), (e \rightarrow)$ は LK と同じ

cut はなく，かわりに次の形の mix を用いる．

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta \qquad \Sigma \rightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma^* \rightarrow \Theta^*, \Pi} \text{ (mix)}$$

ただし，Σ^*, Θ^* のいずれか少なくも一つは空であるとする．

2. 論理記号に関する推論規則

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta}\end{array}\right\} (\wedge \rightarrow) \qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}\end{array}\right\} (\rightarrow \vee)$$

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \Theta \qquad \mathfrak{B} \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \Theta} (\vee \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}} (\rightarrow \wedge)$$

注　推論規則に現われる式はいずれも，左辺，右辺はともに空ではない．

定理 2　論理系 $\boldsymbol{L}$ では基本定理が成り立つ．

定理 3　論理系 $\boldsymbol{L}$ は決定可能である．

定義 7　自由束 L の元に対し，論理体系 $\boldsymbol{L}$ の元を次のように対応させる．

L の演算を含まない元 $x, y, z, \cdots$ に，$\boldsymbol{L}$ の命題変数 $A, B, C, \cdots$

L の元	$x \cap y$, $x \cup y$	に，$\boldsymbol{L}$ の論理式	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$
L の束不等式	$x \leqq y$	に，$\boldsymbol{L}$ の式	$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$
	$x \cap z \leqq y \cup u$	に，	$\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}, \mathfrak{D}$

この対応によって，自由束 L の束不等式に論理体系 $\boldsymbol{L}$ の式が対応する．このとき，後者を前者の**表現式**という．

注　$\boldsymbol{L}$ では定理 2 より mix を除くことができるから，式の右辺または左辺が空になる場合 $\rightarrow \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \rightarrow$ は起こりえない．

さて定義7による対応によって，Lと$\boldsymbol{L}$の同値を証明することができる．すなわち

定理 4 Lと$\boldsymbol{L}$は同値である．

証明（必要条件） まずLの公理 $L1 \sim L4$ および $\boldsymbol{x=x}$ に対応する表現式が $\boldsymbol{L}$ で証明可能であることをいう．これらはすべて $\boldsymbol{x=y}$ の形であるから，これを $x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ でおきかえる．たとえば $L3$ の第一の等式 $\boldsymbol{x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z}$ については，$x \cap (y \cap z) \leqq (x \cap y) \cap z$ および $(x \cap y) \cap z \leqq x \cap (y \cap z)$ の表現式が $\boldsymbol{L}$ で証明可能であることを示せばよい．前半の証明は次のとおり．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{C}}$$
$$\overline{\qquad\qquad\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\to(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\wedge\mathfrak{C}\qquad\qquad}$$

後半は，この証明で $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ を入れかえ，論理式の順を入れかえれば容易にえられる．他の公理についても同様に証明される．

次に導出規則が $\boldsymbol{L}$ で成り立つことを示す．たとえば，$\boldsymbol{x=y \Rightarrow x \cup z = y \cup z}$ について述べれば $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ および $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ を仮定し $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ および $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ の $\boldsymbol{L}$ での証明図をつくればよいが，次のように容易である．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \qquad \dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}}$$

他の導出規則についても同様である．

（十分条件） L の各推論規則について，上式および下式に対応する束不等式が，定義7にしたがってえられるが，上式に対応する束不等式が$\boldsymbol{L}$で成り立つことを仮定し，下式に対応する束不等式が$\boldsymbol{L}$で導かれることを示せば十分である．

構造に関する推論規則については，$(\to c)$, $(c\to)$ は $L1$ から，$(\to e)$, $(e\to)$ は $L2$ から導かれ，$(\to w)$, $(w\to)$ は本質的には $(\to\vee)$, $(\wedge\to)$ に帰着でき，また定理2より mix は考えなくてよいから，問題は論理記号に関する推論規則だけである．

$(\to\vee)$, $(\vee\to)$ は本質的には

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}} \qquad \frac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A} \quad \mathfrak{C}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}}$$

であり，$(\to\wedge)$, $(\wedge\to)$ は上と双対的に考えられるから，結局

$$x\leqq y \Rightarrow x\leqq y\cup z$$

$$y\leqq x,\ z\leqq x \Rightarrow y\cup z\leqq x$$

の二つの関係が $\boldsymbol{L}$ で成り立つことを示せばよい．

第一のものを示すには $\leqq$ の定義より

$$x\cup y=y \Rightarrow x\cup(y\cup z)=y\cup z$$

を示せばよいが，$x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z=y\cup z$ よりえられ

第二のものは

$$y\cup x=x,\ z\cup x=x \Rightarrow (y\cup z)\cup x=x$$

を示せばよいが，$(y\cup z)\cup x=y\cup(z\cup x)=y\cup x=x$ よりえられる． qed

定理 4 より，$\boldsymbol{L}$ で $x_1\cap\cdots\cap x_m=y_1\cup\cdots\cup y_n$ が成り立つかどうかは，$\boldsymbol{L}$ で $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m\to\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_n$ および $\mathfrak{B}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n\to\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m$ が同時に成り立つかどうかで判定できる．定理 3 より $\boldsymbol{L}$ は決定可能であるから $x_1\cap\cdots\cap x_m=y_1\cup\cdots\cup y_n$ が $\boldsymbol{L}$ で成り立つかどうかは有限回の手続きで定まる．

定義 8 代数系における任意の二つの元 x, y が等しいかどうかを，有限回の操作で決定する問題を，この代数系の**語の問題**（word problem）といい，決定できるとき**肯定的に解ける**という．したがって定理 3，定理 4 より

定理 5 自由束 $\boldsymbol{L}$ の語の問題は肯定的に解ける．

B．自由モデュラー束，自由分配束

ここでは自由モデュラー束，自由分配束を表現する論理体系の二，三の特徴づけを考える．

自由モデュラー束は自由束に公理として $L5$ をつけ加えたものであるから，自由モデュラー束に対応する論理体系は，$\boldsymbol{L}$ に公理として式

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}$$

を付け加えたものである．この論理体系を $\boldsymbol{M}$ と名付ける．

定理 6 $\boldsymbol{L}$ に次の 1°〜5° のいずれか一つの式または推論規則を付け加えた体系は $\boldsymbol{M}$ と同値である．

1° $\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}$

2° $\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\quad \mathfrak{C}\to\mathfrak{A}\quad \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}$

3° $\dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}\qquad \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}}$

4° $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\qquad \mathfrak{A},\ \mathfrak{D}\to\mathfrak{B}\qquad \mathfrak{D}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}$ 弱い (∨→)

5° $\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{M},\ \mathfrak{B}\qquad \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}\qquad \mathfrak{C},\ \mathfrak{M}\to\mathfrak{D}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}}$ 弱い cut

証明 1° ⇒ 2° ⇒ 3° ⇒ 4° ⇒ 5° ⇒ 1° を示す.

1° ⇒ 2°

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A})}\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\quad \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A})}}{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A})}\quad \overset{1^\circ}{\mathfrak{C},\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A})\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}\quad \dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}}{\dfrac{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}}
$$

2° ⇒ 3°

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{D},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\,2^\circ}{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})}\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}}\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\to\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}}
$$

3° ⇒ 4°

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}\qquad \mathfrak{A},\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}\vee\mathfrak{D}}\,3^\circ}{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B},\mathfrak{D}}\quad \dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}\qquad \mathfrak{A},\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B},\mathfrak{B}}\,\text{mix}}{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}
$$

4° ⇒ 5°

$$
\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{M},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{M}\vee\mathfrak{B}}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{C},\mathfrak{M}\to\mathfrak{C}}\quad \dfrac{\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}}{\mathfrak{C},\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}}}{\mathfrak{C},\mathfrak{M}\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{M}}}{\mathfrak{C},\mathfrak{M}\to\mathfrak{B},\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{M}}\quad \dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{C},\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}.\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{M}}\quad \mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{C},\ \mathfrak{M}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{M}}\,4^\circ}{}\quad \dfrac{\mathfrak{C}.\ \mathfrak{M}\to\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{M}\to\mathfrak{D}}}{\mathfrak{C},\ \mathfrak{M}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}}
$$

$5^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}}\ 5^\circ$$

qed

注　定理6によれば $\boldsymbol{M}$ と同値な体系がいくつか与えられているが，基本定理が成り立つようなものはいまのところみいだされていない．

次に自由分配束は自由束に公理として $L6$ を付け加えたものであるから，自由分配束に対応する論理体系は，$\boldsymbol{L}$ に公理として

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}\ \to\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}$$

を付け加えたものである．この論理体系を $\boldsymbol{D}$ と名付ける．

定理 7　$\boldsymbol{L}$ に次の 1°〜4° のいずれか一つの式または推論規則を付け加えた体系は $\boldsymbol{D}$ と同値である．

1°　$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$

2°　$\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A},\ \mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}$

3°　$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$

4°　$\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{D}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}}$

証明　$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1^\circ}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{D}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\ \to(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{D})} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}}{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{D})\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}\to\mathfrak{B}}\ \text{mix}$$

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{A}}\ 2^\circ$$

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{M}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vee\mathfrak{M}}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{M})\wedge\mathfrak{C}} \qquad \dfrac{\dfrac{3^\circ}{\mathfrak{B}\vee\mathfrak{M},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\ \mathfrak{M}\wedge\mathfrak{C}}}{(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{M})\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{C})}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{C})}$$

および

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{D},\mathfrak{B}}\qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{M},\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}}{\mathfrak{M},\mathfrak{C}\to\mathfrak{D},\mathfrak{B}}}{\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{D},\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}\vee(\mathfrak{M}\wedge\mathfrak{C})\to\mathfrak{D}\vee\mathfrak{B}}$$

に mix を用いて，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}\vee\mathfrak{B}$. これより $\mathfrak{A},\mathfrak{C}\to\mathfrak{D},\mathfrak{B}$

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\qquad \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}}4^\circ\qquad \mathfrak{C},\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}4^\circ}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C},\ \mathfrak{C}\wedge\mathfrak{A}}}{(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\wedge\mathfrak{C}\to(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\vee(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})}$$

qed

C．Boole 代数，位相束

分配束Dの任意の元 x，y に対し，次の二つの性質

$$x\cap z\leqq y$$

$$x\cap\xi\leqq y \Rightarrow \xi\leqq z$$

をみたすDの元zが存在するとき，zをyに関するxの**相対擬補元**(relatively pseudo-complement）といい，zを $x\supset y$ または $x*y$ で表わす．

とくにDが最小元0（すなわち任意のDの元ηに対して $0\leqq\eta$ である）をもつとき，0に関するxの相対擬補元 $x\supset 0$ を単に**擬補元**（pseudo-complement）といい，x^c で表わす．

相対擬補元が一意にきまる束を**相対擬補束**（relatively pseudo-complemented lattice）といい，Jで表わそう．すなわちJとは0をもつ分配束で

$$x\cap x^c\leqq 0 \tag{7.1}$$

$$x\cap\xi\leqq 0 \Rightarrow \xi\leqq x^c \tag{7.2}$$

の成り立つ代数系のことである．

Jで最小元0をもつということは，Dの任意の元ηに対して

$$0\leqq\eta \tag{7.3}$$

が成り立つということであるから，$0\leqq x\cap x^c$ であるが，一方（7.1）から $x\cap x^c\leqq 0$ であるから

$$x\cap x^c=0 \tag{7.4}$$

である．また（7.3）と（7.4）より，Dの任意の元yについて

$$x \cap x^c \leqq y \tag{7.5}$$

が成り立つ．次に

$$x \leqq y \Rightarrow x \cap y^c = 0 \tag{7.6}$$

が証明できる．

なぜなら，$x \leqq y$ は定義より $x \cap y = x$ であるから

$$x \cap y^c = (x \cap y) \cap y^c$$
$$= x \cap (y \cap y^c) \qquad [\text{結合律より}]$$
$$= x \cap 0 \qquad [(4)\ \text{より}]$$
$$= 0 \qquad [0 \leqq x \Longleftrightarrow x \cap 0 = 0\ \text{より}]$$

なお J では

$$x \leqq x^{cc} \tag{7.7}$$

が成り立つ．∵(7.2) より $x^c \cap x \leqq 0 \Rightarrow x \leqq (x^c)^c$．また (7.1) より $x^c \cap x \leqq 0$ ∴ $x \leqq (x^c)^c$ である．

相対擬補束 J がさらに次の性質

$$x^c \cap \xi \leqq 0 \Rightarrow \xi \leqq x \tag{7.8}$$

をみたすとき，この束を **Boole 代数** (Boolean algebra) といい，B であらわす．

Boole 代数では

$$x^{cc} = x \tag{7.9}$$

が成り立つ．なぜなら (7.8) より $x^c \cap x^{cc} \leqq 0 \Rightarrow x^{cc} \leqq x$ が成り立つが (7.1) より $x^c \cap x^{cc} \leqq 0$ は明らかであるから $x^{cc} \leqq x$．これと (7.7) より (7.9) がえられる．

定理 8 相対擬補束 J，Boole 代数 B はそれぞれ命題計算 LJ，LK と同値である．

証明 LK からあらかじめ論理記号⊃をとり除いたものについて考える．束における束不等式と命題計算における式の間に次のような対応づけ

束の元	$x, y, z, \cdots$ (演算を含まない)	$\longleftrightarrow$	命題変数	$A, B, C, \cdots$
〃	$x \cap y$	$\longleftrightarrow$	論理式	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$
〃	$x \cup y$	$\longleftrightarrow$	〃	$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$
〃	x^c	$\longleftrightarrow$	〃	$\neg \mathfrak{A}$

束の元	0	$\longleftrightarrow$	論理式	$A\wedge \urcorner A$
束不等式	$x\leqq y$	$\longleftrightarrow$	式	$\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$
〃	$x\cap z\leqq y\cup u$	$\longleftrightarrow$	〃	$\mathfrak{A},\mathfrak{C}\to\mathfrak{B},\mathfrak{D}$
〃	$x=y$	$\longleftrightarrow$	〃	$\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ かつ $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$
〃	$x\leqq 0$	$\longleftrightarrow$	〃	$\mathfrak{A}\to$
〃	$x^c\leqq 0$	$\longleftrightarrow$	〃	$\to\mathfrak{A}$

を考えれば，定理4と同じようにして容易に証明することができる． *qed*

次に，Boole 代数においてさらに次の性質をもつ**閉包演算**（closure operation）a が定義されたとき，この代数系を**位相束**（topological lattice）といい，T で表わそう．すなわち，T の任意の元 $x, y, \cdots$ に対し，x^a がまた T の元であり

$$x\leqq x^a \tag{7.10}$$

$$x^{aa}=x^a \tag{7.11}$$

$$(x\cup y)^a=x^a\cup y^a \tag{7.12}$$

$$0^a=0 \tag{7.13}$$

が成り立つ．

注　(7.10)～(7.13) は Kuratowski の位相空間の公理である．位相束はこのほかにも多く扱われる．

定理 9　位相束 T は様相命題計算 S4 と同値である．

証明　位相束 T と S4 の間の対応として Boole 代数と LK の間に与えられた対応（定理8の証明の中で与えられた）にさらに次のものを付け加える．

束の元　x^a　$\longleftrightarrow$　論理式 $\Diamond\mathfrak{A}$

まず与えられた束不等式が T で成り立つとする．この不等式が演算 a を含まないときは Boole 代数 B で成り立つから，この不等式に対応する式は LK で証明可能となりしたがって S4 でも証明可能である．次に束不等式が a を含むとすれば本質的なことは公理 (7.10)～(7.13) に対応する次の諸式

$$\mathfrak{A}\to\Diamond\mathfrak{A};\quad \Diamond\Diamond\mathfrak{A}\to\Diamond\mathfrak{A},\quad \Diamond\mathfrak{A}\to\Diamond\Diamond\mathfrak{A};$$

$$\Diamond(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\Diamond\mathfrak{A}\vee\Diamond\mathfrak{B},\quad \Diamond\mathfrak{A}\vee\Diamond\mathfrak{B}\to\Diamond(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B});$$

$$\Diamond(A\wedge\sim A)\to A\wedge\sim A,\quad A\wedge\sim A\to\Diamond(A\wedge\sim A)$$

が S4 で証明可能であることを示すことであるが，いずれも容易である．たと

えば (7.12) に対応する式の証明は (6.9) の双対で与えられており，(7.13) に対応する式は (6.13) 自身である．

逆にある式が S4 で証明可能とする（ただしこの場合式に表われる⊃は～と∨で，また≺は～と∨と□であらかじめおきかえておくものとする)．S4 の論理記号 □ についての二つの推論規則の上式に対応する束不等式から，下式に対応する束不等式がTにおいて導くことができればよい．

(□→) に対しては (7.10) から容易に導かれる

(→□) に対しては本質的な部分は

$$\frac{\Box\mathfrak{A},\ \Box\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\Box\mathfrak{A},\ \Box\mathfrak{B}\to\Box\mathfrak{C}} \quad \text{および} \quad \frac{\to\mathfrak{A}}{\to\Box\mathfrak{A}} \quad \left(\text{これは}\ \frac{\mathfrak{A}\to}{\Diamond\mathfrak{A}\to}\ \text{と同値である}\right)$$

であるから，Tにおいて次の二つの関係式が成り立てばよい．

$$x^{cac}\cap y^{cac}\leqq z \Rightarrow x^{cac}\cap y^{cac}\leqq z^{cac} \tag{7.14}$$

$$x\leqq 0 \Rightarrow x^{a}\leqq 0 \tag{7.15}$$

(7.15) は (7.13) より明らかである．(7.14) を導くためにさらに次の二つの関係式を証明しておく．

$$x\leqq y \Rightarrow x^{a}\leqq y^{a} \tag{7.16}$$

$$x\cap y\leqq z \Rightarrow x^{cac}\cap y^{cac}\leqq z^{cac} \tag{7.17}$$

まず $x\leqq y$ を仮定する．定義より $x\cup y=y$ だから (7.12) を用いて $x^{a}\cup y^{a}=(x\cup y)^{a}=y^{a}$　∴　$x^{a}\leqq y^{a}$ がえられ (7.16) が成り立つ．

次に $x\cap y\leqq z$ と仮定すると $z^{c}\leqq(x\cap y)^{c}=x^{c}\cup y^{c}$．ゆえに (7.16) より

$$z^{ca}\leqq(x^{c}\cup y^{c})^{a}=x^{ca}\cup y^{ca} \quad \therefore \quad x^{cac}\cap y^{cac}=(x^{ca}\cup y^{ca})^{c}\leqq z^{cac}$$

となり (7.17) が成り立つ．さて (7.14) の証明は次のとおりである．

$x^{cac}\cap y^{cac}\leqq z$ と仮定すると (7.17) より　$x^{cac\cdot cac}\cap y^{cac\cdot cac}\leqq z^{cac}$

ところで $x^{cac\cdot cac}=x^{caac}=x^{cac}$　∴　$x^{cac}\cap y^{cac}\leqq z^{cac}$　*qed*

注　Tの公理 $0^{a}=0$ が S4 では「トートロジーの規則」に対応している．

D．位相束の応用例

位相束の一つの応用として，様相命題論理系 S2 の既約な様相の個数は無限個あることを証明しよう (McKinsey)．S2 の任意の一つの命題変数Aについて $A, \Diamond A, \Diamond^{2}A, \cdots$はすべて異なることを示せば十分である．そのため Lewis の S2 [6·1 節B項参照] に対する位相束の一つのモデルをつくろう．

いま整数全体の集合 I を考える．I の部分集合の全体は集合の和 $\cup$，積 $\cap$ および補集合 c に関して Boole 代数をなすことは明らかである．次に任意の集合 $S(\subset I)$ に対し S^a を定義するために，I の部分集合を I の部分集合にうつす写像 d を次のように定義する．$n \in S \Longleftrightarrow n+1 \in S^d$ すなわち，I の任意の部分集合を S とするとき S の各元にそれぞれ1を加えたものを元とするような集合を S^d とする．たとえば $S=\{-3, 2, 4\}$ ならば $S^d=\{-2, 3, 5\}$ である．明らかに $I^d=I$, $\phi^d=\phi$（ϕ は空集合を表わす）が成り立つが，さらに I の任意の部分集合 S_1, S_2 について次の関係が成り立つ．

1. $(S_1 \cup S_2)^d = S_1{}^d \cup S_2{}^d$

   $\because$ $n \in (S_1 \cup S_2)^d \Longleftrightarrow n-1 \in S_1 \cup S_2 \Longleftrightarrow n-1 \in S_1$ または $n-1 \in S_2 \Longleftrightarrow n \in S_1{}^d$ または $n \in S_2{}^d \Longleftrightarrow n \in S_1{}^d \cup S_2{}^d$

2. $S_1{}^{cd} = S_1{}^{dc}$

   $\because$ $n \in S_1{}^{cd} \Longleftrightarrow n-1 \in S_1{}^c \Longleftrightarrow n-1 \bar{\in} S_1 \Longleftrightarrow n \bar{\in} S_1{}^d \Longleftrightarrow n \in S_1{}^{dc}$

3. $(S_1 \cap S_2)^d = S_1{}^d \cap S_2{}^d$

   $\because$ $(S_1 \cap S_2)^d = (S_1{}^c \cup S_2{}^c)^{cd}$

   $= (S_1{}^c \cup S_2{}^c)^{dc}$ ［2より］

   $= (S_1{}^{cd} \cup S_2{}^{cd})^c$ ［1より］

   $= (S_1{}^{dc} \cup S_2{}^{dc})^c$ ［2より］

   $= S_1{}^d \cap S_2{}^d$

さてこの d を用いて I の任意の部分集合 S に対し $S \cup S^d$ を S の閉包と定義し S^a で表わすと，次の関係が成り立つことが容易にわかる．

任意の集合 S_1, $S_2(\subset I)$ に対し

4. $S_1 \subset S_1{}^a$
5. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_1{}^a \subset S_2{}^a$
6. $(S_1 \cup S_2)^a = S_1{}^a \cup S_2{}^a$
7. $I^a = I$
8. $\phi^a = \phi$（ϕ：空集合）

以上で定義された位相束がS2のモデルであることを証明しよう．すなわちS2の任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に含まれる命題変数 $A, B, C, \cdots$，論理記号 $\wedge, \vee, \sim, \Diamond$

をそれぞれ位相束の元 $S_1, S_2, S_3, \cdots$，演算 $\cap$，$\cup$，c，a でおきかえてできる束の元を $[\mathfrak{A}]$ と表わすとき，S 2 の証明可能な論理式 $\mathfrak{A}$ に対しては $[\mathfrak{A}]=I$ が成り立つことが示される．

まず Lewis の形式化における S 4 の公理 1，2，3，4，5 および 9 に対応する値——すなわちこれらの公理の命題変数および論理記号に位相束の対応する元および演算をほどこしたもの——が I になることが証明される．方法はいずれも同様であるから公理 5 について計算してみよう．

公理 5 は $((A\prec B)\wedge(B\prec C))\prec(A\prec C)$ であり，基本論理記号だけを用いて表わせば $\sim\Diamond(\sim\Diamond(A\wedge\sim B)\wedge\sim\Diamond(B\wedge\sim C)\wedge\Diamond(A\wedge\sim C))$ となる．したがって $[((A\prec B)\wedge(B\prec C))\prec(A\prec C)]=((A\cap B^c)^{ac}\cap(B\cap C^c)^{ac}\cap(A\cap C^c)^a)^{ac}$ となる．d は $\cup$ および $\cap$ に関して加法的でありまた c と交換可能である．これと a の性質を用いて一番外側の ac 以外の a を d を用いて表わし，c を順次中にくり入れて行き分配法則を用いると，上式の右辺はさらに次のように変形できて I となる．すなわち

$$=(((A\cap B^c)\cup(A\cap B^c)^d)^c\cap((B\cap C^c)\cup(B\cap C^c)^d)^c\cap((A\cap C^c)\cup(A\cap C^c)^d))^{ac}$$

$$=((A\cap B^c)^c\cap(A\cap B^c)^{dc}\cap(B\cap C^c)^c\cap(B\cap C^c)^{dc}\cap((A\cap C^c)\cup(A^d\cap C^{cd})))^{ac}$$

$$=((A^c\cup B)\cap(A^{dc}\cup B^d)\cap(B^c\cup C)\cap(B^{dc}\cup C^d)\cap((A\cap C^c)\cup(A^d\cap C^{dc})))^{ac}$$

$$=(((A^c\cup B)\cap(A^{dc}\cup B^d)\cap(B^c\cup C)\cap(B^{dc}\cup C^d)\cap(A\cap C^c))\cup((A^c\cup B)\cap(A^{dc}\cup B^d)\cap(B^c\cup C)\cap(B^{dc}\cup C^d)\cap(A^d\cap C^{dc})))^{ac}$$

$$=\phi^{ac}=(\phi\cup\phi^d)^c=I$$

他の公理についても同様である．

次に S 4 の推論規則 α）～δ）についてしらべよう．

δ）　$[\mathfrak{A}]=I$, $[\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}]=I$ のとき $[\mathfrak{B}]=I$ を示す．

仮定より $([\mathfrak{A}]\cap[\mathfrak{B}]^c)^{ac}=I$ だから $(I\cap[\mathfrak{B}]^c)^{ac}=I$　すなわち $[\mathfrak{B}]^{cac}=I$

$\therefore$　$[\mathfrak{B}]^{ca}=\phi$　したがって $[\mathfrak{B}]=I$

γ）　$[\mathfrak{A}]=I$　$[\mathfrak{B}]=I$　であるから　$[\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}]=[\mathfrak{A}]\cap[\mathfrak{B}]=I\cap I=I$

β）　$[\mathfrak{A}=\mathfrak{B}]=I$ より $[\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}]\cap[\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A}]=I$　$\therefore$　$[\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}]=I$ かつ

$[\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A}]=I$ である．$[\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}]=I$ よりは $([\mathfrak{A}]\cap[\mathfrak{B}]^c)^{ac}=I$. ∴ $[\mathfrak{A}]\cap[\mathfrak{B}]^c=\phi$ となり $[\mathfrak{A}]\subset[\mathfrak{B}]$. 同様にして $[\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A}]=I$ よりは $[\mathfrak{B}]\subset[\mathfrak{A}]$ となり，集合として $[\mathfrak{A}]=[\mathfrak{B}]$ をうる．

α）については明らかである．以上で位相束はS2のモデルであることが示された．

さて A に対応する位相束の元として整数0だけからなる集合を考える．すなわち $[A]=\{0\}$ である．$[\Diamond A]=[A]^a=[A]\cup[A]^d=\{0\}\cup\{0, 1\}=\{0, 1\}$ 同様にして $[\Diamond^2 A]=\{0, 1, 2\}$, 一般に $[\Diamond^n A]=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ となる．これらの集合は明らかにすべて異なるから，このことより A, $\Diamond A$, $\Diamond^2 A, \cdots$ はすべて異なる様相であることが示された． *qed*

増　　補

以下の［1］〜[13] のうち，［2］と [11] は訂正であり，その他は補足である．

［1］（p. 18, ↓7〜↓9）

MP は推論であるが演繹定理はメタな推論である．このような2種類の推論の仮定された体系 Γ から論理式 $\mathfrak{A}$ が導かれる（記号で $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$）とは，次の4つの条件のいずれかが満たされているときと定義すればよい．　1）$\mathfrak{A}$ が Γ に含まれれば $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$　2）$\Gamma,\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ ならば $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$　3）$\mathfrak{A},\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}$　4）$\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ かつ $\mathfrak{A},\Sigma\vdash\mathfrak{B}$ ならば $\Gamma,\Sigma\vdash\mathfrak{B}$.

［2］（p. 38, ↓2〜↓14）

定理 10 の証明にあらわれる $i_j,\hat{i}_j\,(j=1,\cdots,k)$ をすべて $i_j',\hat{i}_j'$ にかえる，また ↓14 のあとに次のものを付け加える．

「ところで論理式が恒真であるという性質は自由変数のおきかえによって不変であるから，$a_{i_j}'(j=1,\cdots,k)$ をすべて a_{i_j} でおきかえれば，$\mathfrak{F}(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ は恒真となる」．

［3］（p. 44, ↑4）

$\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_n\wedge\mathfrak{A}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_{\alpha_{m-1}}$ を $\mathfrak{B}$（ただし $m=1$ のときは $\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_n$ を $\mathfrak{B}$）とおけば $m\geqq1$ の場合にも $m=1$ の証明をそのままつかうことができる．

［4］（p. 48, ↑15）

補助定理5の証明について補足しておく．

（p. 49, ↓5〜↓10）$\mathfrak{F}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ かつ $\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega\Longleftrightarrow\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ の証明は次のように簡単にすることができる．⇒ は $\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\supset\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}$ に補助定理4の 1）を用いる．⇐ は $\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\supset\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\wedge\mathfrak{G}\supset\mathfrak{G}$ に同じく補助定理4の 1）を用いる．

（p. 49, ↓11）$\mathfrak{A}=\mathfrak{F}\vee\mathfrak{G}$ のとき，⇒ は 2.2 の場合と同様であるが ⇐ は少し変更が必要である．$\mathfrak{F}\vee\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$, $\mathfrak{F}\,\bar{\in}\,\tilde{\Gamma}_\omega$ より $\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ を示せば十分であるが，まず $\mathfrak{F}\vee\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$ より $\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k$ が存在して $\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k\in\tilde{\Gamma}_\omega$ かつ

$\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k)\supset\mathfrak{F}\vee\mathfrak{G}$……①. $\mathfrak{F}\bar{\in}\tilde{\Gamma}_\omega$ よりは $\tilde{\Gamma}_\omega$ の極大であることを用いて $\tilde{\Gamma}_\omega\cup\{\mathfrak{F}\}$ は矛盾. ∴ $\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j$ が存在して $\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j\in\tilde{\Gamma}_\omega$, かつ $\vdash\neg(\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j\wedge\mathfrak{F})$ すなわち $\vdash(\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j)\supset\neg\mathfrak{F}$……②. ①, ② より $\vdash(\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_k\wedge\mathfrak{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{B}_j)\supset\mathfrak{G}$. したがって補助定理 4 の 1) より $\mathfrak{G}\in\tilde{\Gamma}_\omega$.

［5］ (p. 66, ↓11)

NJ に Pierce の論理式を付け加えると NK になることを証明するには論理式 $\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ を導けば十分である. 証明図は次のとおり.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^1 \quad \dfrac{\mathfrak{A}^1 \quad \mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A}^2}{\neg\mathfrak{A}}}{\text{人}}}{\neg\mathfrak{A}}\,1 \quad \neg\neg\mathfrak{A}^3}{\text{人}}}{\mathfrak{A}}}{(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}}\,2 \quad ((\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}}{\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}}\,3$$

［6］ (p. 67, ↑8)

証明中に論理式 $((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})$ が用いられるので証明を与えておく. (このほか p. 67, ↑4; p. 69, ↓3 などにも用いられる)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^1 \quad \dfrac{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})^2}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}} \quad \dfrac{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})^2}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\,1}{((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})}\,2$$

［7］ (p. 69, ↑6)

Glivenko の定理の証明はより簡単にすることができる. たとえば, $\wedge_1$, $\wedge_2$, $\supset_2$, $\vee_1$, $\neg_2$ についての部分は証明の仕方が同様であるから, 推論規則 $\wedge_1$, $\wedge_2$, $\supset_2$, $\vee_1$, $\neg_2$ をまとめて

$$\frac{\mathfrak{A}_1\cdots\cdots\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}}$$

の形と考えると, これに対応する推論

$$\frac{\neg\neg\mathfrak{A}_1\cdots\cdots\neg\neg\mathfrak{A}_n}{\neg\neg\mathfrak{B}}$$

は次のように証明される．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}_1}\cdots\cdots\overset{n}{\mathfrak{A}_n}}{\mathfrak{B}} \quad \neg\overset{n+1}{\mathfrak{B}}}{\curlywedge}}{\neg\mathfrak{A}_1}\,1 \quad \neg\neg\mathfrak{A}_1}{\curlywedge}}{\vdots}\,2}{\curlywedge}}{\neg\mathfrak{A}_n}\,n \quad \neg\neg\mathfrak{A}_n}{\curlywedge}}{\neg\neg\mathfrak{B}}\,n+1$$

また

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\curlywedge}}{\neg\curlywedge} \quad \overset{1}{\curlywedge}}{\curlywedge}}{\neg\curlywedge}\,1 \quad \neg\neg\curlywedge}{\curlywedge}$$

より $\dfrac{\neg\neg\curlywedge}{\curlywedge}$ が成り立つから，これを用いると $\neg_1$ および（α）に対応する推論が証明される．

［8］（p. 90，↓12）

Gentzen は LHK (Hilbert 流の公理系), NK，LK の同値を証明しているが，証明の大筋は次のとおりである．

1）LHK の証明図を NK の証明図に直す（LHK の公理と推論が NK でゆるされることを示せばよい）．

2）NK の証明図を LK の証明図に直す（基本的な考え方は p. 80 に述べた）．

3）LK の証明図を LHK の証明図に直す（基本的な考え方は p. 87 に述べた）．

［9］（p. 91，↓12）

ある体系で二つの式が同等であるとは，その体系で式の一つを仮定して，他方の式が導かれるときをいう）．

[10] (p. 93, ↑2)

証明図において上下(p. 85 参照)につらなる式の 個数の 最大数をこの証明図の長さという．ただし始式だけからなる証明図の長さは1とする．

[11] (p. 94, ↓3～↓10)

a が (→∀) の eigenvariable の場合の 証明(↓3～↓10)は削除．なお，↓11 の「a が (→∀) の eigenvariable でないとき」を「a は (→∀) の eigenvariable でないから」に変える．

[12] (p. 116, ↓13)

eigenvariable a が他の場所では eigenvariable としてでなく用いられることもあるので，自由変数のおきかえを実行する場合上のような2通りの用い方をしている文字 a については予め異った文字でおきかえをしておく必要がある．

[13] (p. 160, ↑4～↑5) に次のものを入れる．

「注) ◇ は ～□～ の略記号として導入したので，以下においては様相の既約，可約などに関しては ◇ はすべて ～□～ でおきかえたもので考えねばならない」

[14] (p. 160, ↑12)「既約である」のあとに次のものを入れる．

「$\mathfrak{A}$ と既約でかつ $\mathfrak{A}$ より小さい degree の様相が存在しないとき $\mathfrak{A}$ を既約な様相という」

参　考　書

本書の執筆のため参考にした単行本，文献およびその他気付いた二，三のものをあげておこう．名著でここにあげなかったものも多いので，なお必要あれば [11]，[14]，[15] などの巻末を参照せられたい．

[1] 黒田成勝：数学基礎論（岩波数学講座）岩波書店，1932

[2] 河田敬義，竹内外史：自然数論，河出書房，1951

[3] 赤　摂也：基礎論（新初等数学講座）小山書店，1955

[4] 竹内外史：数学基礎論（現代数学講座）共立出版，1956

[5] 吉田夏彦：論理学（新数学シリーズ）培風館，1958

[6] 竹内外史：数学基礎論講義（東大数学教室セミナリー・ノート）1964

[7] 前原昭二：数理論理学序説（共立全書）共立出版，1966

[8] 前原昭二：記号論理入門，日本評論社，1967

[9] 井関清志：記号論理学（命題論理）（数学選書）槇書店，1968

[10] A. Church : Introduction to mathematical logic Part I, Princeton Univ. Press, 1944

[11] H. B. Curry : Foundations of Mathematical Logic, McGraw-Hill, 1963

[12] R. Feys : Modal Logics, Gauthier-Villars, 1965

[13] D. Hilbert, W. Ackermann : Grundzüge der theoretischen Logik, 4 Aufl., Springer, 1959
伊藤誠訳：記号論理学の基礎，大阪教育図書

[14] S. C. Kleene : Introduction to metamathematics, Van Nostrand, 1952

[15] S. C. Kleene : Mathematical Logic, John Wiley & Sons, Inc., 1967

[16] C. I. Lewis, C. H. Langford : Symbolic logic, New York, 1958

[17] R. C. Lyndon : Notes on logic, Van Nostrand, 1964

[18] E. Mendelson : Introduction to mathematical logic, Van Nostrand, 1964

[19] P. Novikov : Elements of mathematical logic, London, 1964
石本新訳：記号論理学，東京図書

[20] G. H. von Wright : An essay in modal logic, Amsterdam, 1951

第1章では前原 [7]，D. Hilbert, W. Ackermann [13]，P. Novikov [19] などのほか E. Mendelson [18] が参考になった．第2章では前記 [18] のほか主として竹内

[6] によった．第3章では赤 [3]，前原 [8]，H. B. Curry [11] を参考にしたが文献として最も利用したのは

[21] G. Gentzen : Untersuchungen über das logische Schliessen I. II., Math. Z. 39 (1935) 176～210, 405～431

である．また [21] の R. Feys, J. Ladrière による仏訳 Recherches sur la déduction logique, Presses universitaires de France 1955. も大いに役立った．第4章では竹内 [4] および Gentzen [21] を用い，第5章では

[22] G. Gentzen : Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Leipzig, 1938

の内容をほとんど忠実に再現した．第6章では C. I. Lewis, C. H. Langford [16], G. H. von Wright [20], R. Feys [12] が参考になった．

索　　引

—ア　行—

—カ　行—

—サ　行—

―タ　行―

―ナ　行―

―ハ　行―

—マ　行—

—ヤ　行—

—ラ　行—

—ワ　行—

——著 者 紹 介——

まつ もと かず お
松 本 和 夫

最終学歴	1947年大阪帝国大学理学部数学科卒業
専　　攻	数学基礎論
	理学博士

復刊　数理論理学

1970年 2 月10日　初版1刷発行
1971年12月25日　増補1刷発行
1977年 9 月15日　増補3刷発行
2001年 8 月15日　復刊1刷発行
2010年 5 月10日　復刊5刷発行

NDC 410.1

著　者　松　本　和　夫

発行者　南　條　光　章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　望　月　節　男
東京都新宿区市谷本村町3丁目29番

発行所
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番（代表）
郵便番号112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　　製本・中條製本　　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会　員

ISBN4-320-01682-3